



Uniwersytet  
Ekonomiczny  
w Katowicach

# STUDIA EKONOMICZNE

Zeszyty Naukowe  
Uniwersytetu Ekonomicznego  
w Katowicach

---

**248** 2015



Wydawnictwo  
Uniwersytetu Ekonomicznego  
w Katowicach

**Komitet Redakcyjny**

Krystyna Lisiecka (przewodnicząca), Monika Ogrodnik (sekretarz),  
Alojzy Czech, Florian Kuźnik, Maria Michałowska, Antoni Niederliński, Irena Pyka,  
Stanisław Swadźba, Tadeusz Trzaskalik, Janusz Wywiół, Teresa Żabińska

**Rada Programowa**

Lorenzo Fattorini, Mario Glowik, Miloš Král, Bronisław Micherda,  
Zdeněk Mikoláš, Marian Noga, Gwo-Hsiung Tzeng

**Redakcja naukowa**

Tadeusz Trzaskalik

**Redakcja językowa**

Urszula Czerwińska

**Skład**

Mirosław Safian

© Copyright by Wydawnictwo Uniwersytetu Ekonomicznego w Katowicach 2015

**ISSN 2083-8611**

Nakład: 150 egzemplarzy

Wersją pierwotną Studiów Ekonomicznych jest wersja papierowa

Publikacja jest dostępna na stronie internetowej Uniwersytetu Ekonomicznego w Katowicach:  
[www.ue.katowice.pl/jednostki/wydawnictwo](http://www.ue.katowice.pl/jednostki/wydawnictwo), a także w bibliograficznej bazie BazEkon:  
[kangur.uek.krakow.pl/bazy\\_ae/bazekon/nowy/advanced.php](http://kangur.uek.krakow.pl/bazy_ae/bazekon/nowy/advanced.php)

Wszelkie prawa zastrzeżone.

Każda reprodukcja lub adaptacja całości bądź części niniejszej publikacji,  
niezależnie od zastosowanej techniki reprodukcji, wymaga pisemnej zgody Wydawcy

**Druk i oprawa**

EXPOL P. Rybiński, J. Dąbek Spółka Jawna  
ul. Brzeska 4, 87-800 Włocławek



WYDAWNICTWO UNIwersytetu Ekonomicznego w KATOWICACH

ul. 1 Maja 50, 40-287 Katowice, tel.: +48 32 257-76-33, faks: +48 32 257-76-43  
[www.wydawnictwo.ue.katowice.pl](http://www.wydawnictwo.ue.katowice.pl), e-mail: [wydawnictwo@ue.katowice.pl](mailto:wydawnictwo@ue.katowice.pl)

## SPIS TREŚCI

### **Marcin Anholcer**

|                                                                               |   |
|-------------------------------------------------------------------------------|---|
| Algorytm dla wieloasortymentowego stochastycznego zadania transportowego..... | 7 |
|-------------------------------------------------------------------------------|---|

### **Krzysztof Dmytrów**

|                                                                                     |    |
|-------------------------------------------------------------------------------------|----|
| Taksonomiczne wspomaganie wyboru lokalizacji w procesie kompletacji produktów ..... | 17 |
|-------------------------------------------------------------------------------------|----|

### **Mariusz Doszyń, Krzysztof Dmytrów**

|                                                                          |    |
|--------------------------------------------------------------------------|----|
| Obciążenie magazynu w kontekście trafności systemu prognoz sprzedaży ... | 31 |
|--------------------------------------------------------------------------|----|

### **Helena Gaspars-Wieloch**

|                                                                                                                           |    |
|---------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|----|
| O regule decyzyjnej wspierającej wielokryterialne poszukiwanie optymalnej strategii czystej w warunkach niepewności ..... | 42 |
|---------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|----|

### **Bartłomiej Gawel, Bogdan Rębiasz, Iwona Skalna**

|                                                                                          |    |
|------------------------------------------------------------------------------------------|----|
| Teoria prawdopodobieństwa i teoria możliwości w podejmowaniu decyzji inwestycyjnych..... | 62 |
|------------------------------------------------------------------------------------------|----|

### **Barbara Gładysz, Kazimierz Frączkowski**

|                                                            |    |
|------------------------------------------------------------|----|
| Wielowymiarowa analiza czynników sukcesu projektów IT..... | 80 |
|------------------------------------------------------------|----|

### **Stefan Grzesiak, Robert Józwiak**

|                                                                                             |    |
|---------------------------------------------------------------------------------------------|----|
| Interpolacja funkcji taryfowej w optymalizacji podatku dochodowego od osób fizycznych ..... | 90 |
|---------------------------------------------------------------------------------------------|----|

### **Urszula Grzybowska, Marek Karwański**

|                                                                                  |     |
|----------------------------------------------------------------------------------|-----|
| Szacowanie parametrów ryzyka kredytowego przy użyciu rodzin klasyfikatorów ..... | 107 |
|----------------------------------------------------------------------------------|-----|

### **Andrzej Karpio, Dorota Żebrowska-Suchodolska**

|                                                                                                              |     |
|--------------------------------------------------------------------------------------------------------------|-----|
| Ryzyko rynkowe otwartych funduszy emerytalnych mierzone korelacją z indeksem uwzględniającym WIG i TBSP..... | 121 |
|--------------------------------------------------------------------------------------------------------------|-----|

### **Jacek Konciak**

|                                                                        |     |
|------------------------------------------------------------------------|-----|
| Ryzyko pożaru w budynkach mieszkalnych w Polsce w latach 2000-2010 ... | 134 |
|------------------------------------------------------------------------|-----|

### **Adam Krzemienowski**

|                                                                                                             |     |
|-------------------------------------------------------------------------------------------------------------|-----|
| Zastosowanie rozkładu najgorszego przypadku do konstrukcji stabilnego portfela inwestycji finansowych ..... | 150 |
|-------------------------------------------------------------------------------------------------------------|-----|

|                                                                                                                                                                                                                         |     |
|-------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|-----|
| <b>Tomasz Kuszewski, Agata Sielska</b><br>Profile produkcyjne producentów rolnych w regionach FADN dla Polski.....                                                                                                      | 161 |
| <b>Piotr Miszczyński</b><br>Przykład wykorzystania wskaźnika CLV w ocenie projektu inwestycyjnego....                                                                                                                   | 180 |
| <b>Krzysztof Piasecki</b><br>O stopie zwrotu oszacowanej przez intuicyjny rozmyty zbiór<br>probabilistyczny .....                                                                                                       | 195 |
| <b>Marcin Salamaga</b><br>Analiza determinantów wyboru kierunków eksportu z wykorzystaniem<br>drzew decyzyjnych.....                                                                                                    | 206 |
| <b>Zbigniew Świtalski</b><br>Some properties of competitive equilibria and stable matchings<br>in a Gale-Shapley market model.....                                                                                      | 222 |
| <b>Grzegorz Tarczyński</b><br>Wybór sposobu składowania towarów w automatycznym magazynie<br>niewielkich jednostek ładunkowych .....                                                                                    | 233 |
| <b>Grażyna Trzpiot, Justyna Majewska</b><br>Modelowanie ryzyka długowieczności – ujęcie regionalne.....                                                                                                                 | 245 |
| <b>Grażyna Trzpiot, Jacek Szoltysek</b><br>Analiza preferencji jakości życia seniorów w miastach .....                                                                                                                  | 257 |
| <b>Stanisław Wieteska</b><br>Ubezpieczenia odpowiedzialności cywilnej podmiotów za szkody<br>wyrządzone przez niebezpieczne produkty nieżywnościowe codziennego<br>użytkowania w gospodarstwach domowych w Polsce ..... | 275 |

## SUMMARIES

|                                                                                                                  |    |
|------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|----|
| <b>Marcin Anholcer</b><br>Algorithm for stochastic generalized multicommodity transportation<br>problem .....    | 16 |
| <b>Krzysztof Dmytrów</b><br>Taxonomic support of selection of locations in the process<br>of order-picking ..... | 30 |



|                                                                                                                                                                                      |     |
|--------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|-----|
| <b>Mariusz Doszyń, Krzysztof Dmytrów</b><br>Occupancy of the magazine in the context of accuracy of sales forecasting system .....                                                   | 41  |
| <b>Helena Gaspars-Wieloch</b><br>On a decision rule for searching an optimal pure strategy in uncertain multicriteria decision making .....                                          | 61  |
| <b>Bartłomiej Gawel, Bogdan Rębiasz, Iwona Skalna</b><br>Probability theory and possibility theory in investment decision making .....                                               | 79  |
| <b>Barbara Gładysz, Kazimierz Frączkowski</b><br>Multidimensional analysis of factors of IT project success .....                                                                    | 89  |
| <b>Stefan Grzesiak, Robert Józwiak</b><br>Interpolation of tariff function in optimisation of personal income tax .....                                                              | 105 |
| <b>Urszula Grzybowska, Marek Karwański</b><br>Families of classifiers application in credit risk parameters estimation .....                                                         | 120 |
| <b>Andrzej Karpio, Dorota Żebrowska-Suchodolska</b><br>Market risk of the open-end pension funds measured by correlation with the index taking into consideration WIG and TBSP ..... | 133 |
| <b>Jacek Konciak</b><br>Victims of fires and local threats that took place in residential buildings in Poland in 2000-2010 .....                                                     | 149 |
| <b>Adam Krzemienowski</b><br>Construction of a stable portfolio of financial investments by means of the worst-case distribution .....                                               | 160 |
| <b>Tomasz Kuszewski, Agata Sielska</b><br>Production profiles of polish agricultural producers in FADN regions .....                                                                 | 179 |
| <b>Piotr Miszczyński</b><br>Example of use of CLV indicator to assess investment project .....                                                                                       | 194 |
| <b>Krzysztof Piasecki</b><br>On return rate estimated by intuitionistic fuzzy probabilistic set .....                                                                                | 205 |
| <b>Marcin Salamaga</b><br>Analysis of the determinants of the choice of export directions with using classification trees .....                                                      | 221 |
| <b>Zbigniew Świtalski</b><br>Some properties of competitive equilibria and stable matchings in a Gale-Shapley market model .....                                                     | 222 |

**Grzegorz Tarczyński**

Selection of method of storage location assignment in miniload warehouses.... 244

**Grażyna Trzpiot, Justyna Majewska**

Modeling of longevity risk in a regional context..... 256

**Grażyna Trzpiot, Jacek Szoltysek**

Analysis of the preference of the quality of life of seniors in cities ..... 274

**Stanisław Wieteska**

Liability insurance for damage caused by dangerous non-food products  
of everyday use in households in Poland ..... 289



**Marcin Anholcer**

Uniwersytet Ekonomiczny w Poznaniu  
Wydział Informatyki i Gospodarki Elektronicznej  
Katedra Badań Operacyjnych  
m.anholcer@ue.poznan.pl

## ALGORYTM DLA WIELOASORTYMENTOWEGO STOCHASTYCZNEGO ZADANIA TRANSPORTOWEGO<sup>1</sup>

**Streszczenie:** W wieloasortymentowym zadaniu transportowym celem jest optymalizacja transportu kilku (co najmniej dwóch) dóbr od dostawców do odbiorców. W stochastycznej wersji zadania wielkości popytu poszczególnych odbiorców na poszczególne dobra są zmiennymi losowymi, a celem jest minimalizacja sumy kosztów transportu i wartości oczekiwanej dodatkowych kosztów związanych z realizacją dostaw w wielkości innej niż rzeczywista realizacja popytu. W uogólnionej wersji zagadnienia zakłada się ponadto, że ilości transportowanych dóbr zmieniają się w czasie transportu. W pracy przedstawiony został model zadania i zaproponowana metoda jego rozwiązywania.

**Słowa kluczowe:** uogólnione zadanie transportowe, stochastyczne zadanie transportowe, wieloasortymentowe zadanie transportowe, metoda wyrównań.

### Wprowadzenie

W klasycznym zadaniu transportowym jednorodne dobro dostarczane jest od dostawców do odbiorców. Dane są w szczególności jednostkowe koszty transportu, wielkości podaży dostawców i wielkości popytu odbiorców. Celem jest znalezienie takiego planu dostaw, który spełnia wszystkie ograniczenia podażowe i popytowe, jednocześnie minimalizując całkowity koszt transportu. Zmienne decyzyjne mają podwójne indeksy – jeden indeks odpowiada dostawcy, drugi odbiorcy.

<sup>1</sup> Niniejsza praca powstała w ramach projektu „Optymalizacja nieliniowa w wybranych zastosowaniach ekonomicznych”. Projekt został sfinansowany ze środków Narodowego Centrum Nauki przyznanych na podstawie decyzji numer DEC-2011/01/D/HS4/03543.

W przypadku zadania wieloasortymentowego, transportowanych jest jednocześnie kilka towarów (co najmniej dwa). W tym przypadku zmienne są potrójnie indeksowane – jeden indeks odpowiada dostawcy, drugi odbiorcy, trzeci zaś transportowanemu dobru.

W przypadku gdy ilość towaru zmienia się w trakcie transportu (czy to na skutek jego właściwości fizykochemicznych, czy też zdarzeń losowych), zasadne jest rozpatrywanie ogólniejszego modelu, tzw. uogólnionego zadania transportowego (w literaturze polskiej zwanego również zagadnieniem rozdziału, ze względu na jedno z zastosowań; ang. *Generalized Transportation Problem*, GTP). Teoria i wybrane zastosowania uogólnionych przepływów, a w szczególności uogólnionych zadań transportowych przedstawione zostały na przykład w [Ahuja, Magnanti i Orlin, 1993, rozdz. 15]. Różne algorytmy rozwiązywania zadań z tej rodziny można znaleźć między innymi w pracach [Glover, Klingman i Napier, 1972; Goldberg, Plotkin i Tardos, 1988; Ahuja, Magnanti i Orlin, 1993, rozdz. 15; Wayne, 2002]. Wybrane zastosowania w praktycznych problemach gospodarczych opisane zostały w [Nagurney i in., 2013]. Szczególny przypadek, czyli GTP, został omówiony m.in. w pracach [Balas, Ivanescu, 1964; Lourie, 1964; Balas, 1966]. W pracy [Anholcer i Kawa, 2012] autorzy wykazali związek między poziomem reklamacji (czyli ogólniej procentowym udziałem ilości towaru, która nie jest dostępna u odbiorcy) a stopniem złożoności optymalnej sieci dystrybucji.

Stochastyczne zagadnienie rozdziału to bliższa rzeczywistości wersja problemu, w której popyt odbiorców na poszczególne dobra nie jest znany. Zakładamy jednak, że znany jest jego rozkład dla każdego z odbiorców. Stosując podejście Dantziga–Madansky’ego, staramy się zminimalizować wartość oczekiwaną całkowitego kosztu transportu, dostaw, magazynowania itd. Szczególny przypadek tego typu zadania (stochastyczne zadanie transportowe, SGTP) był analizowany m.in. w pracach [Sikora, Runka i Pyrzyński, 1991; Sikora, 1993a; Anholcer, 2005; Anholcer, 2008a; Anholcer, 2008b]. We wszystkich tych pracach analizowana była metoda wyrównań, w [Anholcer, 2005; Anholcer, 2008a] wykazano jej zbieżność w jednej z ogólnych postaci. W [Anholcer, 2012] przedstawiono metodę opartą na zbliżonej idei dla stochastycznego uogólnionego zagadnienia transportowego, a w pracy [Anholcer, 2015] – dla nieliniowego uogólnionego zagadnienia transportowego. Dowiedziono też zbieżności tej wersji metody, wykorzystując m.in. twierdzenia o zbieżności zawarte w [Bazaraa, Sherali i Shetty, 1993, rozdział 7]. Tak zwaną iteracyjną metodę lasu (*Forest Iteration Method*) dla stochastycznego zadania transportowego zaprezentowano w pracy [Qi, 1985], a uogólnioną jej wersję (iteracyjna metoda A-lasu, *A-Forest Iteration Method*) – w pracy [Qi, 1987]. Stochastyczne zadania transportowe z dyskret-

nym rozkładem popytu były analizowane w pracy [Sikora, 1993a], zaś jego uogólniona wersja – w [Anholcer, 2013]. W żadnej ze znanych autorowi prac nie zajmowano się wieloasortymentową wersją zagadnienia.

W niniejszym artykule zaprezentowany zostanie sposób wykorzystania zmodyfikowanej metody wyrównań dla stochastycznego uogólnionego wieloasortymentowego zadania transportowego. Kolejne rozdziały zawierają kolejno: sformułowanie problemu, algorytm, wyniki eksperymentów numerycznych i końcowe wnioski.

## 1. Sformułowanie problemu

Niech  $i = 1, \dots, m$  oznacza indeks dostawcy,  $j = 1, \dots, n$  indeks odbiorcy, zaś  $k = 1, \dots, p$  – indeks towaru. Dla wszystkich kombinacji indeksów dane są jednostkowe koszty transportu  $c_{ij}^k$  towaru  $k$  od dostawcy  $i$  do odbiorcy  $j$ , wielkości podaży  $a_i^k$  towaru  $k$  u dostawcy  $i$  i wielkości popytu  $b_j^k$  na towar  $k$  u odbiorcy  $j$ . Celem jest znalezienie takiego planu dostaw, który spełnia wszystkie ograniczenia podażowe i popytowe, jednocześnie minimalizując całkowity koszt transportu. W klasycznym sformułowaniu problemu pojawiają się jeszcze ograniczenia na łączną ilość towarów, jaka może zostać przetransportowana od poszczególnych dostawców do poszczególnych odbiorców. Ze względu na ich techniczny charakter i niewielki związek z rzeczywistością, zostaną one pominięte w tej pracy. Przyjmując, że zmiana w ilości towaru  $k$  przewożonego od dostawcy  $i$  do odbiorcy  $j$  reprezentowana jest przez mnożnik  $r_{ij}^k$ , liniowe wieloasortymentowe uogólnione zadanie transportowe można zapisać w postaci (oznaczymy je przez GMTP):

$$\min \left\{ f(x) = \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n \sum_{k=1}^p c_{ij}^k x_{ij}^k \right\}$$

p.w.

$$\sum_{i=1}^m r_{ij}^k x_{ij}^k = b_j^k, \quad j = 1, \dots, n, \quad k = 1, \dots, p,$$

$$\sum_{j=1}^n x_{ij}^k = a_i^k, \quad i = 1, \dots, m, \quad k = 1, \dots, p,$$

$$x_{ij}^k \geq 0, \quad i = 1, \dots, m, \quad j = 1, \dots, n, \quad k = 1, \dots, p.$$

W stochastycznej wersji problemu, wielkości popytu  $b_j^k$  nie są deterministyczne, ale dane jako ciągle zmienne losowe  $X_j^k$  o funkcjach gęstości  $\varphi_{j,k}$ . Dla każdego odbiorcy  $j$  i towaru  $k$  znane są jednostkowy koszt nadwyżki  $s_{j,k}^{(1)}$  i jednostkowy koszt niedoboru  $s_{j,k}^{(2)}$ . Całkowita ilość towaru dostarczona do każdego z odbiorców musi być nieujemna, więc funkcja oczekiwanego dodatkowego kosztu związanego z odbiorcą  $j$  i towarem  $k$  ma postać

$$f_{j,k}(x_j^k) = s_{j,k}^{(1)} \int_0^{x_j^k} (x_j^k - t) \varphi_{j,k}(t) dt + s_{j,k}^{(2)} \int_{x_j^k}^{\infty} (t - x_j^k) \varphi_{j,k}(t) dt.$$

Stosując standardowe przekształcenia (w szczególności całkowanie przez części), można ją przekształcić do formy

$$f_{j,k}(x_j^k) = s_{j,k}^{(2)}(E(X_j^k) - x_j^k) + (s_{j,k}^{(1)} + s_{j,k}^{(2)}) \int_0^{x_j^k} \Phi_{j,k}(t) dt,$$

gdzie  $\Phi_{j,k}$  jest dystrybuantą popytu odbiorcy  $j$  na towar  $k$ . Łatwo zauważyć, że dla każdego  $j$  i  $k$ , pierwsze dwie pochodne funkcji oczekiwanego dodatkowego kosztu mają postać

$$f'_{j,k}(x_j^k) = -s_{j,k}^{(2)} + (s_{j,k}^{(1)} + s_{j,k}^{(2)}) \Phi_{j,k}(x_j^k),$$

$$f''_{j,k}(x_j^k) = (s_{j,k}^{(1)} + s_{j,k}^{(2)}) \varphi_{j,k}(x_j^k),$$

więc każda z funkcji  $f_{j,k}$  jest funkcją wypukłą. Ostatecznie więc stochastyczne uogólnione wieloasortymentowe zadanie transportowe (SGMTP) ma postać

$$\min \left\{ f(x) = \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n \sum_{k=1}^p c_{ij}^k x_{ij}^k + \sum_{j=1}^n \sum_{k=1}^p f_{j,k}(x_j^k) \right\}$$

p.w.

$$\sum_{i=1}^m r_{ij}^k x_{ij}^k = x_j^k, \quad j = 1, \dots, n, \quad k = 1, \dots, p,$$

$$\sum_{j=1}^n x_{ij}^k = a_i^k, \quad i = 1, \dots, m, \quad k = 1, \dots, p,$$

$$x_{ij}^k \geq 0, \quad i = 1, \dots, m, \quad j = 1, \dots, n, \quad k = 1, \dots, p,$$

$$x_j^k \geq 0, \quad j = 1, \dots, n, \quad k = 1, \dots, p.$$

Zadanie to można przekształcić do postaci zbliżonej do stochastycznego uogólnionego zadania transportowego (SGTP) na tyle, że możliwe będzie jego rozwiązanie za pomocą odpowiednio opracowanego wariantu metody wyrównań. Przypomnijmy, że SGTP to zadanie postaci:

$$\min \left\{ f(x) = \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n c_{ij} x_{ij} + \sum_{j=1}^n f_j(x_j) \right\},$$

p. w.

$$\sum_{i=1}^m r_{ij} x_{ij} = x_j, j = 1, \dots, n,$$

$$\sum_{j=1}^n x_{ij} \leq a_i, i = 1, \dots, m,$$

$$x_{ij} \geq 0, i = 1, \dots, m, j = 1, \dots, n.$$

Jak widać, jedyną różnicą jest występowanie w SGMTP dodatkowego indeksu. Pomocnicze zadanie konstruujemy w ten sposób, że łączymy w pary odbiorców i towary, tworząc „pomocniczych” odbiorców. W ujęciu sieciowym działanie to sprowadza się do przekształcenia hiperkrawędzi  $(D_i, O_j, T_k)$  w krawędź w grafie dwudzielnym  $(D_i, O_{j,k})$ . W ten sposób zadanie z potrójnie indeksowanymi zmiennymi zmienia się *de facto* w zadanie ze zmiennymi o podwójnych indeksach. Funkcja dodatkowego kosztu jest określona dla każdego z „nowych” odbiorców, jedyna różnica polega na tym, że zakresy sumowania w przekształconym problemie są inne niż w SGTP.

## 2. Metoda rozwiązywania

Aby rozwiązać zadanie za pomocą metody wyrównań, wprowadzamy dodatkowe zmienne  $x_{i,0,k}$ . Przyjmujemy przy tym, że  $c_{i,0,k} = 0, r_{i,0,k} = 1$  dla  $i = 1, \dots, m, k = 1, \dots, p$  i  $f_{0,k}(x_0^k) \equiv 0$  dla  $k = 1, \dots, p$ . Wówczas zadanie przyjmuje następującą postać:

$$\min \left\{ f(x) = \sum_{i=1}^m \sum_{j=0}^n \sum_{k=1}^p c_{ij}^k x_{ij}^k + \sum_{j=0}^n \sum_{k=1}^p f_{j,k}(x_j^k) \right\}$$

p.w.

$$\sum_{i=1}^m r_{ij}^k x_{ij}^k = x_j^k, j = 0, \dots, n, k = 1, \dots, p,$$

$$\sum_{j=0}^n x_{ij}^k = a_i^k, i = 1, \dots, m, k = 1, \dots, p,$$

$$x_{ij}^k \geq 0, i = 1, \dots, m, j = 0, \dots, n, k = 1, \dots, p,$$

$$x_j^k \geq 0, j = 0, \dots, n, k = 1, \dots, p.$$

Warunki KKT dla tego zadania mogą zostać zapisane w następującej postaci ( $i = 1, \dots, m, j = 0, \dots, n, k = 1, \dots, p$ ):

$$c_{ij}^k + r_{ij}^k f'_{j,k}(x_j^k) \geq u_i, x_{ij}^k = 0,$$

$$c_{ij}^k + r_{ij}^k f'_{j,k}(x_j^k) = u_i, x_{ij}^k > 0.$$

Poniższy algorytm jest zbieżny do punktu KKT. Dowód zostanie pominięty, gdyż jest analogiczny do dowodów zamieszczonych w pracach [Anholcer, 2012; Anholcer, 2015].

**Algorytm 1: Algorytm dla stochastycznego uogólnionego wieloasortymentowego zagadnienia transportowego.**

1. *Inicjalizacja.* Wyznacz rozwiązanie początkowe zgodnie ze wzorem:

$$x_{ij}^k = 0, i = 1, \dots, m, j = 1, \dots, n, k = 1, \dots, p,$$

$$x_{i,0}^k = a_i^k, i = 1, \dots, m.$$

Wyznacz sumy przywozów do poszczególnych odbiorców:

$$x_j^k = \begin{cases} \sum_{i=1}^n a_i^k, & j = 0, \\ 0, & j \neq 0. \end{cases}$$

Wyznacz początkowe wartości pochodnych cząstkowych:

$$h_{ij}^k = c_{ij}^k + r_{ij}^k f'_{j,k}(0), i = 1, \dots, m, j = 1, \dots, n, k = 1, \dots, p,$$

$$h_{i,0,k} = 0, i = 1, \dots, m, k = 1, \dots, p.$$

Przejdź do kroku 2.



2. *Sprawdzanie optymalności.* Dla każdej pary  $i, k$  wyznacz:

$$\begin{aligned} v_i^k &= \min\{h_{ij}^k | j = 0, \dots, n\}, \\ w_i^k &= \max\{h_{ij}^k | j = 0, \dots, n, x_{ijk} > 0\}, \\ w_i &= \max\{w_i^k | k = 1, \dots, p\}. \end{aligned}$$

Niech  $k^*(i)$  będzie indeksem  $k$ , dla którego  $w_i^{k^*(i)} = w_i$ . Niech  $j^{**}(i)$  będzie indeksem  $j$ , dla którego  $h_{ij}^{k^*(i)} = v_i^{k^*(i)}$  i niech  $j^*(i)$  będzie indeksem  $j$ , dla którego  $h_{ij}^{k^*(i)} - v_i^{k^*(i)} = w_i$ . Oblicz

$$\alpha = \max\{w_i | i = 1, \dots, m\}.$$

Niech  $i^*$  będzie indeksem  $i$ , dla którego  $w_i = \alpha$ . Jeżeli  $\alpha < \varepsilon$ , to STOP. Otrzymane rozwiązanie zadowalająco blisko optimum. W przeciwnym przypadku przyjmij  $j^{**} = j^{**}(i^*)$ ,  $j^* = j^*(i^*)$ ,  $k^* = k^*(i^*)$ . Przejdź do kroku 3.

3. *Zmiana rozwiązania.*

Niech

$$\begin{aligned} \delta^-(\lambda) &= f'_{j^*k^*}(x_{j^*}^{k^*}) - f'_{j^*k^*}(x_{j^*}^{k^*} - \lambda), \\ \delta^+(\lambda) &= f'_{j^{**}k^*}(x_{j^{**}}^{k^*} + \lambda) - f'_{j^{**}k^*}(x_{j^{**}}^{k^*}). \end{aligned}$$

Niech  $\lambda^*$  będzie rozwiązaniem równania

$$r_{i^*j^*}^{k^*}\delta^-(\lambda) + r_{i^*j^{**}}^{k^*}\delta^+(\lambda) = w_{i^*}.$$

Jeżeli  $\lambda^* > x_{i^*j^*}^{k^*}$ , podstaw

$$\lambda^* := x_{i^*j^*}^{k^*}.$$

Zmień rozwiązanie zgodnie ze wzorami:

$$\begin{aligned} x_{i^*j^*}^{k^*} &:= x_{i^*j^*}^{k^*} - \lambda^*, \\ x_{i^*j^{**}}^{k^*} &:= x_{i^*j^{**}}^{k^*} + \lambda^*, \\ x_{j^*}^{k^*} &:= x_{j^*}^{k^*} - r_{i^*j^*}^{k^*}\lambda^*, \\ x_{j^{**}}^{k^*} &:= x_{j^{**}}^{k^*} + r_{i^*j^{**}}^{k^*}\lambda^*. \end{aligned}$$

Podstaw

$$h_{ij^*}^k := h_{ij^*}^k - r_{ij^*}^k\delta^-(\lambda^*), i = 1, \dots, m, k = 1, \dots, p$$

oraz

$$h_{ij^{**}}^k := h_{ij^{**}}^k + r_{ij^{**}}^k\delta^+(\lambda^*), i = 1, \dots, m, h = 1, \dots, p.$$

Wróć do kroku 2.

### 3. Eksperymenty obliczeniowe

W celu zbadania sprawności algorytmu, rozwiązano pewną liczbę losowo wygenerowanych zadań testowych. Rozpatrywano dwa typy rozkładów popytu: jednostajny  $U(0, u)$  i wykładniczy  $Exp(\lambda)$ , przy czym  $u$  i  $\lambda$  losowano jednostajnie z przedziałów odpowiednio  $[15, 20)$  i  $[0, 5, 0, 6)$ . Jednostkowe koszty transportu były losowane jednostajnie z przedziału  $[2, 4)$ , koszty nadmiaru z przedziału  $[1, 2)$ , koszty niedoboru z przedziału  $[5, 10)$ , współczynniki redukcji z przedziału  $[0, 8, 0, 9)$ , a wielkości podaży z przedziału  $[10, 20)$ . W przypadku zadań z rozkładem jednostajnym, optymalna długość kroku wyznaczana była w sposób dokładny (równanie pozwalające wyznaczyć długość kroku jest wówczas równaniem kwadratowym), zaś w przypadku rozkładu wykładniczego – za pomocą jednowymiarowej metody Newtona. Algorytm został zaimplementowany w Java SE i uruchomiony na PC z procesorem Intel(R) Core(TM) i7-2670 QM CPU @2.20 GHz. Wybrano i rozwiązano po 1000 losowo wygenerowanych zadań o rozmiarach:  $(m, n, p) = (10, 10, 5), (10, 20, 5), (100, 100, 10), (100, 200, 10)$ , czyli łącznie 8000 zadań. Czasy rozwiązywania w milisekundach (AVG – średni, DEV – odchylenie standardowe, MIN – najkrótszy, MAX – najdłuższy) przedstawiono w tabeli 1.

**Tabela 1.** Wyniki eksperymentów (czasy rozwiązywania w milisekundach)

| Typ zadania | $U(0, u)$<br>10×5×10 | $U(0, u)$<br>10×5×20 | $U(0, u)$<br>100×10×100 | $U(0, u)$<br>100×10×200 | $Exp(\lambda)$<br>10×5×10 | $Exp(\lambda)$<br>10×5×20 | $Exp(\lambda)$<br>100×10×100 | $Exp(\lambda)$<br>100×10×200 |
|-------------|----------------------|----------------------|-------------------------|-------------------------|---------------------------|---------------------------|------------------------------|------------------------------|
| AVG         | 0,678                | 3,902                | 2667,133                | 37344,552               | 9,593                     | 32,014                    | 18171,425                    | 84271,195                    |
| DEV         | 1,793                | 11,923               | 2678,549                | 24206,693               | 40,401                    | 190,844                   | 19747,728                    | 61027,151                    |
| MIN         | 0,068                | 0,423                | 291,907                 | 4218,134                | 0,513                     | 2,322                     | 1546,08                      | 12394,305                    |
| MAX         | 30,387               | 154,461              | 22816,568               | 191395,155              | 861,289                   | 5019,121                  | 167272,196                   | 475414,130                   |

Źródło: Opracowanie własne.

Jak widać, algorytm szybko (w czasie co najwyżej kilku minut) rozwiązuje zadania o stosunkowo dużych rozmiarach. W przypadku najmniejszych testowych zadań czas rozwiązywania jest rzędu kilku milisekund.

### Podsumowanie

W pracy omówiono stochastyczne uogólnione wieloasortymentowe zagadnienie rozdziału z ciągłym rozkładem popytu i przedstawiono efektywny algorytm jego rozwiązywania. Warto zauważyć, że działanie zaprezentowanego algorytmu nie jest równoważne  $p$ -krotnemu uruchomieniu metody wyrównań dla SGTP,

opisanej w [Anholcer, 2012; Anholcer, 2015]. Wprawdzie ustalenie wartości  $k$  sprawia, że problem przyjmuje właśnie tę formę, więc rozwiązanie optymalne (dokładne) problemu SGMTP jest sumą rozwiązań optymalnych (dokładnych)  $p$  problemów typu SGTP. Jednak ze względu na to, że każdy z powyższych problemów rozwiązywany jest tylko z pewną dokładnością, zastosowanie przedstawionej wyżej metody pozwala osiągnąć szybszą zbieżność.

## Literatura

- Ahuja R.K., Magnanti T.L., Orlin J.B. (1993), *Network Flows. Theory, Algorithms and Applications*, Prentice Hall, Englewood Cliffs, New Jersey.
- Anholcer M. (2005), *Zbieżność Metody wyrównań dla nieliniowych zadań alokacji* [w:] K. Piasecki, W. Sikora (red.), *Z prac Katedry Badań Operacyjnych*, „Zeszyty Naukowe Akademii Ekonomicznej w Poznaniu”, nr 64, s. 183-198.
- Anholcer M. (2008a), *Analiza porównawcza wybranych algorytmów rozwiązywania nieliniowych zadań alokacji dóbr jednorodnych*, Wydawnictwo Akademii Ekonomicznej w Poznaniu, Poznań.
- Anholcer M. (2008b), *Porównanie działania wybranych algorytmów rozwiązywania nieliniowych zadań alokacji* [w:] R. Kopańska-Bródka (red.), *Metody i zastosowania badań operacyjnych '2007*, „Prace Naukowe Akademii Ekonomicznej w Katowicach”, Katowice, s. 9-25.
- Anholcer M. (2012), *Algorithm for Stochastic Generalized Transportation Problem*, *Operations Research and Decisions* Vol. 22, Number 4, pp. 9-20.
- Anholcer M. (2013), *Stochastic Generalized Transportation Problem with Discrete Distribution of Demand*, *Operations Research and Decisions* Vol. 23 (2013), Number 4, pp. 9-19.
- Anholcer M. (2015), *On the Nonlinear Generalized Transportation Problem with Convex Costs*, „Croatian Operational Research Review”, accepted.
- Anholcer M., Kawa A. (2012), *Optimization of Supply Chain via Reduction of Complaints Ratio*, „Lecture Notes in Computer Science”, Volume 7327, pp. 622-628.
- Balas E. (1966), *The Dual Method for the Generalized Transportation Problem*, „Management Science”, Vol. 12, No. 7, Series A, Sciences, pp. 555-568.
- Balas E., Ivanescu P.L. (1964), *On the Generalized Transportation Problem*, „Management Science”, Vol. 11, No. 1, Series A, Sciences, pp. 188-202.
- Bazaraa M.S., Sherali H.D., Shetty C.M. (1993), *Nonlinear Programming. Theory and Algorithms*, John Wiley & Sons Inc., New York – Chichester – Brisbane – Toronto – Singapore.
- Glover F., Klingman D., Napier A. (1972), *Basic Dual Feasible Solutions for a Class of Generalized Networks*, „Operations Research”, Vol. 20, No. 1, pp. 126-136.

- Goldberg A.V., Plotkin S.A., Tardos E. (1988), *Combinatorial Algorithms for the Generalized Circulation Problem*, SFCS'88 Proceedings of the 29th Annual Symposium on Foundations of Computer Science, pp. 432-443.
- Lourie J.R. (1964), *Topology and Computation of the Generalized Transportation Problem*, „Management Science”, Vol. 11, No. 1, Series A, Sciences, pp. 177-187.
- Nagurney A., Yu M., Masoumi A.H., Nagurney L.S. (2013), *Networks Against Time. Supply Chain Analytics for Perishable Products*, Springer Briefs in Optimization, Springer.
- Qi L. (1985), *Forest Iteration Method for Stochastic Transportation Problem*, „Mathematical Programming Study” 25, pp. 142-163.
- Qi L. (1987), *The A-Forest Iteration Method for the Stochastic Generalized Transportation Problem*, „Mathematics of Operations Research”, Vol. 12, No. 1, pp. 1-21.
- Sikora W. (1993a), *Problem transportowy z losowym popytem odbiorców*, „Przegląd Statystyczny” XXXIX (3-4), ss. 351-364.
- Sikora W. (1993b), *Modele i metody optymalnej dystrybucji dóbr*, „Zeszyty naukowe – seria II, Prace doktorskie i habilitacyjne”, Akademia Ekonomiczna w Poznaniu, Poznań.
- Sikora W., Runka H., Pyrzyński D. (1991), *Optymalizacja przepływów w sferze dystrybucji dóbr jednorodnych*, Grant no. H\12\209\90-2, Akademia Ekonomiczna w Poznaniu, Poznań.
- Wayne K.D. (2002), *A Polynomial Combinatorial Algorithm for Generalized Minimum Cost Flow*, „Mathematics of Operations Research”, Vol. 27, No. 3, pp. 445-459.

#### ALGORITHM FOR STOCHASTIC GENERALIZED MULTICOMMODITY TRANSPORTATION PROBLEM

**Summary:** In the multicommodity transportation problem the goal is to optimize the transport of several (at least two) goods from suppliers to destination points. In the stochastic version of the problem the demands of customers for individual goods are random variables, and the goal is to minimize the total costs of transportation together with the expected additional costs, depending on the difference between the supply size and the particular realization of the demand. In the generalized version of the problem we assume, moreover, that the amount of transported goods change during the transportation process. The model of the problem and the solution method have been presented in the paper.

**Keywords:** Generalized Transportation Problem, Stochastic Transportation Problem, Multicommodity Transportation Problem, Equalization Method.



## Krzysztof Dmytrów

Uniwersytet Szczeciński  
Wydział Nauk Ekonomicznych i Zarządzania  
Instytut Ekonometrii i Statystyki  
Katedra Badań Operacyjnych i Zastosowań Matematyki w Ekonomii  
krzysztof.dmytrow@usz.edu.pl

# TAKSONOMICZNE WSPOMAGANIE WYBORU LOKALIZACJI W PROCESIE KOMPLETACJI PRODUKTÓW

**Streszczenie:** Można wyróżnić dwa rodzaje przechowywania produktów w magazynie – przechowywanie dedykowane i współdzielone. W przechowywaniu dedykowanym każdy produkt jest przydzielony do konkretnej lokalizacji i na odwrót – w danej lokalizacji jest przechowywany tylko jeden produkt. Bardziej efektywne, jeżeli chodzi o wykorzystanie powierzchni magazynowej, jest przechowywanie współdzielone, w którym teoretycznie każdy produkt może występować w dowolnej liczbie lokalizacji i w każdej lokalizacji może być przechowywana dowolna liczba produktów. W takim przypadku, w procesie kompletacji zamówienia dany produkt można pobrać z wielu różnych lokalizacji. Do wyboru lokalizacji, które musi odwiedzić magazynier w procesie kompletacji, zostaną wykorzystane metody taksonomiczne. Każda lokalizacja zostanie opisana za pomocą kilku cech, a następnie jej atrakcyjność z punktu widzenia danego zamówienia zostanie określona za pomocą *Taksonomicznej Miary Atrakcyjności Lokalizacji (TMAL)*.

**Słowa kluczowe:** gospodarka magazynowa, kompletacja, taksonomia, porządkowanie liniowe.

## Wprowadzenie

Kompletacja produktów jest na ogół najważniejszym procesem, który zachodzi w gospodarce magazynowej, ponieważ jest ona najbardziej czasochłonna i kosztochłonna [Bartholdi, Hackman, 2014, s. 151]. Szacuje się, że koszty związane z kompletacją stanowią około 55% łącznych kosztów operacyjnych magazynu [De Koster i in., 2007, s. 482]. Dlatego niezwykle istotne jest, aby

starać się ten proces optymalizować. Jednym ze sposobów optymalizacji procesu kompletacji jest jego automatyzacja. Istnieją w pełni zautomatyzowane systemy, w których całe zamówienie jest kompletowane przez roboty. Innymi przykładami zautomatyzowanych systemów są układy, w których ludzie jedynie odbierają produkty (systemy *parts-to-picker*). Mimo istniejących możliwości technicznych, wciąż ponad trzy czwarte systemów stosowanych w Europie Zachodniej to klasyczne systemy typu *picker-to-parts* [De Koster, i in., 2007, s. 486]. W takich konfiguracjach w sposób naturalny optymalizacja procesu kompletacji związana jest z wyznaczeniem możliwie najkrótszej drogi, jaką musi pokonać magazynier, odwiedzając lokalizacje, w których znajdują się kompletowane produkty.

Przed wyborem drogi, którą musi pokonać pracownik magazynu, trzeba wybrać lokalizacje, które ma odwiedzić. Wbrew pozorom ich wybór nie zawsze jest oczywisty. Można wyróżnić dwa główne sposoby przechowywania produktów [Bartholdi, Hackman, 2014, s. 14-18]:

- przechowywanie dedykowane (w literaturze anglojęzycznej nazywane *dedicated storage*),
- przechowywanie współdzielone (w literaturze anglojęzycznej nazywane *shared storage*).

Przechowywanie dedykowane w swojej klasycznej postaci charakteryzuje się tym, że dany produkt jest przechowywany tylko w jednej lokalizacji i, z drugiej strony, dana lokalizacja jest zarezerwowana do przechowywania tylko jednego produktu.

Przechowywanie współdzielone to takie, gdzie dany produkt może być teoretycznie przechowywany w dowolnej liczbie lokalizacji i w danej lokalizacji może być przechowana dowolna liczba różnych produktów. Gdy produkty są przyjmowane do magazynu, muszą zostać rozmieszczone tam, gdzie jest odpowiednia ilość miejsca. Może być wiele lokalizacji, w których można umieścić przychodzący do magazynu towar. Istnieją trzy sposoby rozłożenia produktów w przypadku przechowywania współdzielonego [De Koster i in., 2007, s. 491]:

- przechowywanie chaotyczne (*chaotic storage*) – podczas przyjmowania produktów do magazynu, są one rozmieszczane w sposób przypadkowy [Gudehus, Kotzab, 2012, s. 478] (najbardziej znanym przedsiębiorstwem stosującym tzw. magazyn chaotyczny jest Amazon),
- składowanie w najbliższej wolnej lokalizacji (*closest open location storage*),
- składowanie według klasy (*class-based storage*) – blisko miejsca startowego rozmieszcza się produkty najczęściej zamawiane, a najdalej – najrzadziej zamawiane (można także stosować na przykład system ABC bądź XYZ).

Zaletą przechowywania dedykowanego jest to, że w każdym momencie wiadomo, w którym miejscu szukać danego produktu. Dzięki temu magazynierzy mogą zapamiętać rozmieszczenie produktów w magazynie, co powoduje, że kompletacja jest prosta i często nie wymaga stosowania żadnego systemu wspomagającego ten proces. Wadą przechowywania dedykowanego jest nieefektywne wykorzystanie przestrzeni magazynowej. Przy jednym produkcie przestrzeń magazynowa w danej lokalizacji jest wykorzystana przeciętnie w połowie. Przy dwóch produktach wykorzystanie przestrzeni wynosi już 66,7%, przy trzech – 75%. Można zapisać, że wykorzystanie przestrzeni magazynowej danej lokalizacji w zależności od liczby produktów w niej przechowywanych dana jest wzorem:

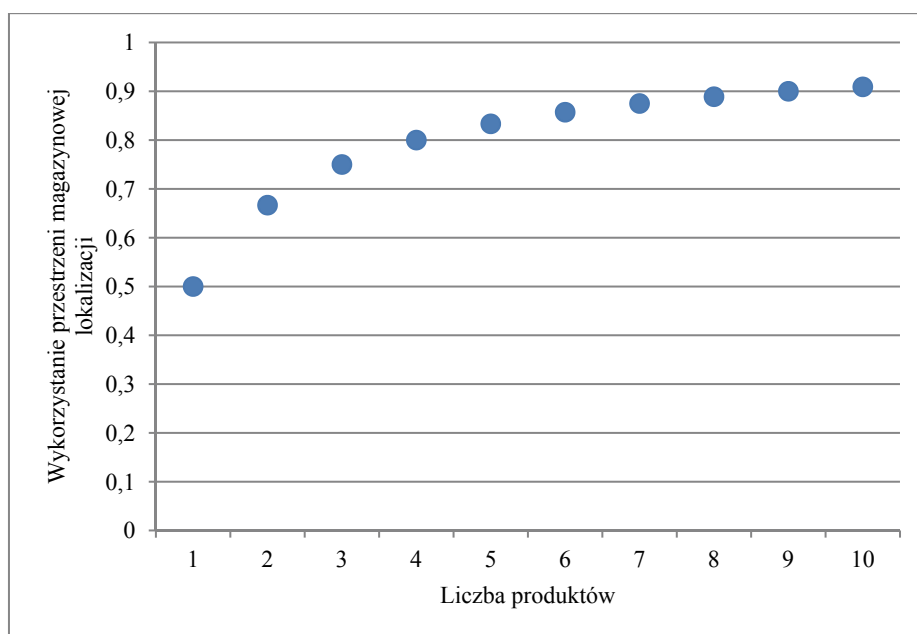
$$U = \frac{k}{k + 1},$$

gdzie:

$U$  – stopień wykorzystania przestrzeni magazynowej danej lokalizacji,

$k$  – liczba produktów przechowywanych w danej lokalizacji.

Zależność pomiędzy stopniem wykorzystania lokalizacji a liczbą przechowywanych w niej produktów przedstawia rys. 1.



**Rys. 1.** Wykorzystanie przestrzeni magazynowej lokalizacji w zależności od liczby produktów

Źródło: Bartholdi, Hackman [2014, s. 18].

Rys. 1 pokazuje zasadniczą zaletę przechowywania współdzielonego – im więcej produktów przechowuje się w danej lokalizacji, tym pełniejsze jest jej wykorzystanie. Z kolei wadą takiego rozwiązania jest to, że (szczególnie przy dużej liczbie produktów i lokalizacji) magazynier nie jest w stanie zapamiętać tego, gdzie dane produkty się znajdują. Dlatego w przypadku przechowywania współdzielonego konieczne jest zastosowanie komputerowego systemu wspomagającego gospodarowanie magazynem. Na rynku istnieje wiele systemów umożliwiających zarządzanie przedsiębiorstwem typu ERP/SAP, w których są moduły kontrolujące gospodarkę magazynową, w tym także kompletację, jednak nie w każdym przypadku stosowanie tak dużego i kosztownego systemu jest uzasadnione.

W przypadku przechowywania współdzielonego często trzeba podjąć decyzję, z której lokalizacji zabrać dany produkt (jeżeli jest przechowywany w więcej niż jednej lokalizacji). Można tego dokonać na kilka sposobów.

Najprostszym rozwiązaniem (i często najbardziej odpowiednim) jest pobieranie produktów według kolejki FIFO (First In, First Out). Taki sposób jest najbardziej naturalny, gdy mamy do czynienia z produktami o ograniczonym okresie przydatności albo łatwo psującymi się. Wtedy najpierw pobierane są te produkty, które zostały przyjęte do magazynu najwcześniej (czyli leżą w nim najdłużej). Jednak nie zawsze trzeba postępować według tej zasady, gdyż wiele produktów zachowuje przydatność przez znacznie dłuższy okres, niż wynosi ich rotacja. Tak więc na pewno często zdarza się taka sytuacja, w której z punktu widzenia czasu kompletacji bardziej będzie się opłacało podejść później do lokalizacji, do której dany produkt został przydzielony niż do innej.

Inną metodą jest wybór lokalizacji według czasu wydania. Należy wybrać taką lokalizację, do której magazynier będzie miał najkrótszą drogę (od startu albo od innej, wcześniej odwiedzanej lokalizacji) oraz z której pobranie produktu będzie najkrótsze (czyli na przykład wybierzemy lokalizację położoną na niższej półce, do której nie będzie wymagane zastosowanie na przykład wózka widłowego).

Kolejną stosowaną metodą jest wybór lokalizacji według stopnia zaspokojenia zapotrzebowania na kompletowany produkt. Wybiera się lokalizację, w których stopień ten jest największy.

Wymienione powyżej sposoby wyboru lokalizacji można stosować oddzielnie lub łącznie. Wymienione cechy stanowią o atrakcyjności lokalizacji z punktu widzenia danego zlecenia. W artykule zostanie zaprezentowane łączne uwzględnienie wybranych cech. W tym celu zostanie zbudowana *Taksonomiczna Miara Atrakcyjności Lokalizacji (TMAL)*, będąca zmienną syntetyczną, opartą na prostym *Syntetycznym Mierniku Rozwoju (SMR)* [Hellwig, 1968]. Przedstawiona metoda dedykowana jest małym lub średnim przedsiębiorstwom, których nie



stać albo nie mają potrzeby stosowania dużych, zintegrowanych systemów wspomagających zarządzanie firmą.

Celem artykułu jest zastosowanie *Taksonomicznej Miary Atrakcyjności Lokalizacji* do wybrania lokalizacji w procesie kompletacji produktów.

## 1. Oznaczenia i metodyka

### 1.1. Specyfikacja cech opisujących lokalizację

Pierwszym etapem budowy syntetycznego miernika rozwoju jest ustalenie cech opisujących każdą lokalizację. W niniejszej pracy będą to trzy zmienne:

- odległość od startu,
- stopień zaspokojenia zapotrzebowania,
- liczba innych kompletowanych produktów w okolicy danej lokalizacji.

Oczywiście nie są to wszystkie możliwe zmienne, ich liczba zależy od tego, co jest ważne dla decydenta.

Odległość od startu jest jedną z najważniejszych (jeśli nie najważniejszą) cech opisujących daną lokalizację, ponieważ w procesie kompletacji produktów przemieszczanie się magazyniera po magazynie stanowi ponad 50% całego procesu kompletacji. Będzie ona oznaczona przez  $x_1$ <sup>\*1</sup>. Należy jednak zauważyć, że nie chodzi o to, żeby mierzyć precyzyjnie odległość od każdej lokalizacji do innej, na przykład w metrach. Mogą to być jednostki umowne, na przykład kroki albo szerokość półek. W niniejszej pracy policzono odległości miejskie, a jednostką jest szerokość półki.

Na podstawie liczby jednostek danego produktu w danej lokalizacji powstanie druga cecha – stopień zaspokojenia zapotrzebowania na kompletowany produkt, oznaczona przez  $x_2$ . Będzie ona liczona następująco:

$$x_2 = \begin{cases} \frac{l}{z}, & \text{gdy } z > l, \\ 1 & \text{gdy } l \geq z \end{cases} \quad (1)$$

gdzie:

$l$  – liczba jednostek kompletowanego produktu, znajdująca się w danej lokalizacji,

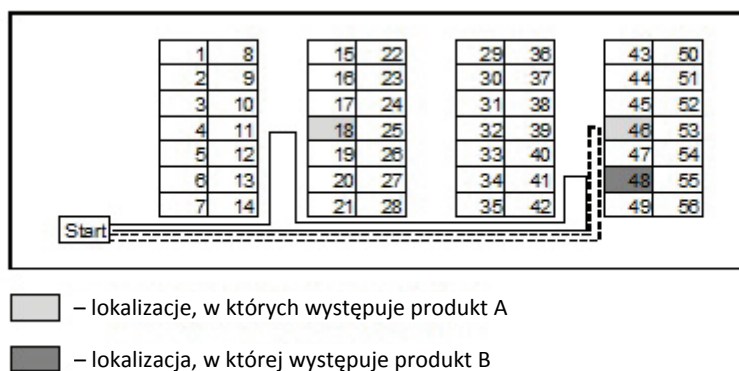
$z$  – zapotrzebowanie na kompletowany produkt.

Takie obliczenie wartości zmiennej  $x_2$  spowodowane jest tym, że z punktu widzenia kompletacji zamówienia największe znaczenie ma jak największy stopień zaspokojenia zapotrzebowania. Jeżeli na przykład trzeba zebrać 100 jedno-

<sup>1</sup> Oznakowanie tej zmiennej gwiazdką zostanie omówione w dalszej części.

stek jakiegoś produktu, więc jeśli w jednej lokalizacji jest 150, a w innej 200 jednostek, z punktu widzenia badanego zlecenia obie lokalizacje są jednakowo atrakcyjne, gdyż w obu zamówienie zostanie zrealizowane w całości, czyli stopień realizacji wyniesie 1.

Z punktu widzenia drogi, którą musiałby pokonać magazynier w procesie kompletacji, ważne jest też to, żeby odwiedzane lokalizacje były jak najbliżej siebie. Dlatego kolejną cechą, opisującą dane położenie, jest liczba innych produktów będących na liście kompletacyjnej, znajdujących się w tym miejscu lub w bezpośredniej jej okolicy. Oznaczono ją przez  $x_3$ . Należy dokładnie sprecyzować, co rozumiemy przez bezpośrednią okolicę danej lokalizacji. Może to być usytuowanie będące maksymalnie w określonej odległości od badanej lokalizacji. Inną możliwością, zastosowaną w tym przypadku, będzie wybór miejsca w tej samej alejce. Taką sytuację uwzględniono w niniejszym przypadku. Prosty przykład grupowania odwiedzanych lokalizacji przedstawiono na rys. 2.



**Rys. 2.** Grupowanie lokalizacji na przykładzie dwóch produktów

Jak widać z powyższego rysunku, produkt A występuje w dwóch lokalizacjach – o nr. 18 oraz 46. Produkt B występuje tylko w jednej, oznaczonej nr. 48. Dla uproszczenia założmy, że produkt A można skompletować w całości, odwiedzając jedną z dwóch, obojętnie którą, lokalizacji. Jeżeli bierzemy pod uwagę jedynie odległości pomiędzy startem a odwiedzaną pozycją, to powinniśmy wybrać lokalizację 18 (żeby skompletować produkt A) oraz 48 (żeby skompletować produkt B). Wówczas magazynier pokona drogę oznaczoną linią ciągłą. Jeżeli natomiast uwzględnimy grupowanie lokalizacji, wówczas lepiej jest wybrać miejsce nr 46, zamiast 18 (dla produktu A). Mimo że lokalizacja nr 46 jest położona dalej, to całkowita droga pokonana przez magazyniera (oznaczona linią przerywaną) będzie krótsza.

Oczywiście, wyspecyfikowane na potrzeby niniejszej pracy zmienne diagnostyczne nie muszą stanowić kompletnego ich zbioru. Jeżeli mamy do czynienia z produktami o ograniczonym okresie przydatności albo psującymi się, należy stosować regułę FIFO, czyli w tej sytuacji zmienną diagnostyczną będzie czas przechowywania produktu w magazynie w danej lokalizacji. Wybieramy te, które są przechowywane najdłużej. Innym przykładem może być grupowanie lokalizacji do odwiedzenia w sektorach wysokiego składowania. Wtedy pożądane jest pobieranie produktów z jednego pionu (o ile jest to możliwe), gdyż wtedy operator wózka będzie miał do pokonania najmniejszą trasę i znacząco skróci to czas jego pracy.

## 1.2. Konstrukcja *Taksonomicznej Miary Atrakcyjności Lokalizacji*

Z wybranych trzech zmiennych diagnostycznych odległość od startu  $x_1^*$  jest destymulantą, zaś stopień zaspokojenia zapotrzebowania oraz liczba innych kompletowanych w okolicy produktów są stymulantami. Dlatego należy odległość zamienić na stymulantę, poprzez obliczenie jej odwrotności:

$$x_1 = \frac{1}{x_1^*}$$

Jest to oczywiście jedna z wielu możliwości zamiany destymulanty na stymulantę. Inną metodą jest odjęcie wartości zmiennej od jej wartości maksymalnej. Dla danych standaryzowanych można wszystkie wartości przemnożyć przez -1, a w przypadku danych zunitaryzowanych odjąć od jedności. Zastosowana tutaj metoda jest zawsze możliwa do zastosowania, ponieważ odległość od startu nigdy nie będzie równa 0.

*Taksonomiczna Miara Atrakcyjności Lokalizacji (TMAL)* jest w całości oparta o *Syntetyczny Miernik Rozwoju*. Wyznaczono go następująco [Nowak, 1990; Ostasiewicz (red.), 1998]:

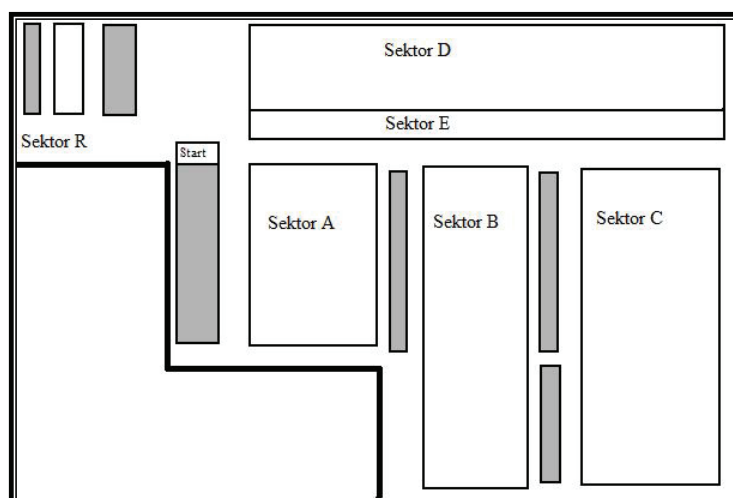
- po zamianie odległości na stymulantę dokonano standaryzacji zmiennych,
- wyznaczono maksymalne wartości zmiennych standaryzowanych, tworzące tzw. „obiekt idealny”,
- obliczono odległości euklidesowe pomiędzy wartościami zmiennych w danej lokalizacji a „obiektem idealnym”,

- nadano wagę zmiennym – odległość lokalizacji od startu miała wagę 0,4, stopień zaspokojenia zapotrzebowania – 0,3, a liczba innych kompletowanych produktów w okolicy –  $0,3^2$ ,
- obliczono wzorzec rozwoju,
- obliczono wartości *TMAL*,
- wybrano lokalizacje o najwyższych pozycjach w rankingu, aż do zaspokojenia zapotrzebowania.

W taki sposób wybieramy lokalizacje do odwiedzenia, aby zebrać wszystkie kompletowane produkty. Należy zaznaczyć, że na etapie wybierania lokalizacji nie jest jeszcze wyznaczana trasa. Dopiero mając wybrane wszystkie lokalizacje, ustalamy trasę, którą ma pokonać magazynier.

## 2. Przykład

Zaprezentowany przykład przedstawia rzeczywiste zlecenie kompletacyjne w pewnym przedsiębiorstwie, które zajmuje się dystrybucją narzędzi i odzieży roboczej. W przedsiębiorstwie tym jest duży magazyn, podzielony na sześć sektorów. Jego układ jest dość nietypowy, nie wszystkie półki są do siebie równoległe, dodatkowo pomiędzy sektorami na podłodze stoją kartony. Plan magazynu przedstawia rys. 3.



Rys. 3. Plan magazynu

<sup>2</sup> Wagi nadano w sposób subiektywny. Powodem przyjęcia takiego systemu wag było nienadawanie konkretnej zmiennej dużo większego wpływu na wielkość *TMAL* niż w przypadku pozostałych zmiennych.

Sektory A, B, C, R są sektorami niskiego składowania, sektory D oraz E – wysokiego. W sektorach niskiego składowania magazynier stojąc, ma dostęp do każdej półki. W przypadku sektora D jest w nim pięć poziomów, oznaczonych cyframi 0, 1, 2, 3, 4 oraz 5. W przypadku sektora E są to trzy poziomy: 0, 1, 2. Magazynier stojąc, ma pełen dostęp do poziomów 0 i 1. Do poziomu 2 można się dostać za pomocą zwykłego wózka widłowego, a do najwyższych półek (poziomy 3, 4 oraz 5) – jedynie za pomocą wózka wysokiego składowania (typu *reach truck*). Oprócz sektorów, produkty pobiera się też z kartonów stojących na podłodze (kolor szary na rysunku), które w systemie też widnieją jako odrębne lokalizacje.

Każda lokalizacja zapisana jest w formacie XX-XX-XX-XX. Pierwsze dwa znaki oznaczają sektor, dwa kolejne numer regału, dwie kolejne numer półki, przedostatnia – poziom, ostatnia – numer miejsca paletowego na półce (1, 2 lub 3, tylko w sektorze wysokiego składowania, w pozostałych jest tam 0).

Wybierając lokalizację, może się zdarzyć, że dany produkt będzie położony w dwóch miejscach. W pierwszym będzie bliżej startu, ale na wyższej półce w sektorze wysokiego składowania (większa wartość przedostatniej wartości w symbolu lokalizacji), a w drugiej – dalej od startu, ale na niższej półce (takiej, z której magazynier może pobrać towar, stojąc na podłodze). W takim przypadku należy preferować tę drugą lokalizację (mimo że fizycznie jest wyżej). Dlatego odległości do miejsc położonych na wyższych półkach w sektorze wysokiego składowania należy dodać odpowiednio dużą wartość, żeby były brane pod uwagę w dalszej kolejności, gdy nie będzie produktów dostępnych na niższych półkach. Procedura jest następująca:

- jeżeli dany towar znajduje się w lokalizacji „0D” i jest na poziomie „2”, wówczas do odległości dodajemy 300. Jeżeli wynosi on „3”, „4” lub „5” – dodajemy 500.
- jeżeli dany towar jest w lokalizacji „0E” i mieści się na poziomie „2”, wówczas do odległości dodajemy 250.

Prezentowane zlecenie dotyczyło zebrania ośmiu rozmiarów tych samych butów roboczych. Dane dotyczące liczby par każdego rozmiaru przedstawia tabela 1.

**Tabela 1.** Liczba par butów do skompletowania

| Rozmiar | Liczba par |
|---------|------------|
| R39     | 10         |
| R40     | 10         |
| R41     | 10         |
| R42     | 80         |
| R43     | 80         |
| R44     | 80         |
| R45     | 50         |
| R46     | 10         |

Przedstawione powyżej buty znajdują się w różnych lokalizacjach. Tabela 2 przedstawia rozmieszczenie produktów w magazynie. Warto odnotowania jest to, że w pomieszczeniu występuje wystarczająca do skompletowania zamówienia liczba par butów w każdym rozmiarze.

**Tabela 2.** Rozmieszczenie produktów w magazynie

| Rozmiar | Lokalizacje |
|---------|-------------|
| R39     | 0D-08-09-03 |
| R40     | 0E-01-02-21 |
|         | 0D-08-03-22 |
|         | 0D-08-12-11 |
|         | 0C-23-08-40 |
| R41     | 0E-01-03-22 |
|         | 0D-08-12-01 |
| R42     | 0P-05-01-00 |
|         | 0D-04-14-21 |
|         | 0D-08-05-22 |
|         | 0P-05-05-00 |
| R43     | 0P-05-01-00 |
| R44     | 0P-05-05-00 |
| R45     | 0P-05-05-00 |
|         | 0D-04-13-22 |
|         | 0D-04-13-23 |
| R46     | 0E-01-10-22 |
|         | 0D-02-06-43 |
|         | 0D-07-12-11 |

Jak wynika z powyższej tabeli, zdecydowana większość lokalizacji występuje w sektorze wysokiego składowania. Wyjątkiem są lokalizacje: 0C-23-08-40, która znajduje się w sektorze „0C”, „0P-05-01-00”, będąca podłogą pomiędzy sektorami „0A” i „0B” oraz „0P-05-05-00”, będąca podłogą na skraju sektora „0D” (bliżej startu – por. rys. 1). Widać, że dla butów o rozmiarach 39, 43 i 44 nie ma potrzeby budować wskaźnika *TMAL*, ponieważ każda z tych par występuje tylko w jednej lokalizacji. Pierwsza występuje tylko w 0D-08-09-03, druga w 0P-05-01-00 i trzecia w 0P-05-05-00. Tak więc te trzy lokalizacje na pewno trzeba będzie odwiedzić, żeby pobrać z nich odpowiednią liczbę par butów.

Jeżeli chodzi o rozmiar 41, to z dwóch lokalizacji, w którym on występuje (0E-01-03-22 oraz 0D-08-12-01), pierwsza z nich jest położona wyżej niż druga (siódmy znak pierwszej pozycji to „2”, więc aby dostać się do tej lokalizacji potrzebny jest wózek widłowy, a siódmy znak w drugiej to „0”, czyli towar znajduje się w niej na podłodze, z której magazynier może zabrać produkt bezpośrednio). Z tego wynika, że na pewno zostanie odwiedzona lokalizacja 0D-08-12-01. Jeżeli chodzi o rozmiar 45, to odpowiednie buty znajdują się na podłodze w pozycji 0P-05-05-00 albo na poziomie „2” lokalizacji 0D-04-13-22 i 0D-04-13-23. W tym

przypadku także zostanie odwiedzona pierwsza z trzech wymienionych lokalizacji. Analogicznie, rozmiar 46 zostanie pobrany z miejsca 0D-07-12-11 (ponieważ dwa pozostałe, w których on występuje, są położone na poziomach „2” i „4”). Jedynymi produktami, dla których trzeba faktycznie wybrać umiejscowienie za pomocą wskaźnika *TMAL*, są buty w rozmiarach 40 i 42. Przykład zostanie zaprezentowany dla rozmiaru 40.

Najpierw należy określić odległości każdej lokalizacji od startu i ewentualnie zawyżyć je, jeżeli znajdują się na wyższych poziomach w sektorze wysokiego składowania. Razem z liczbą par w każdej lokalizacji przedstawia je tabela 3.

**Tabela 3.** Występowanie butów o rozmiarze 40 w każdej lokalizacji, odległości rzeczywiste i ewentualnie zawyżone od startu

| Lokalizacja | Liczba par | Odległości rzeczywiste | Ewentualne odległości zawyżone |
|-------------|------------|------------------------|--------------------------------|
| 0E-01-02-21 | 150        | 199                    | 449                            |
| 0D-08-03-22 | 60         | 200                    | 500                            |
| 0D-08-12-11 | 60         | 175                    | 175                            |
| 0C-23-08-40 | 7          | 127                    | 127                            |

W każdej lokalizacji, oprócz ostatniej, zapotrzebowanie na produkt (10 par) jest zaspokojone w całości. W pozycji 0C-23-08-40 zapotrzebowanie zaspokojone będzie w 0,7.

Trzeba jeszcze określić trzecią zmienną, czyli liczbę innych produktów do skompletowania w danym zamówieniu w okolicy (w tej samej alejce). W przypadku konkretnego magazynu, lokalizacje leżące na regale 0E-01-XX-XX leżą w tej samej alejce, co te na regale 0D-09-XX-XX oraz podłoga 0P-05-05-00. Podobnie lokalizacje 0D-08-XX-XX, 0D-07-XX-XX wraz z 0P-05-05-00 tworzą kolejną okolicę. Patrząc na tabelę 2, jeżeli chcemy znaleźć liczbę innych produktów w okolicy pozycji 0E-01-02-21, będą to produkty: R41 (w lokalizacji 0E-01-03-22), R42, R44, R45 (w 0P-05-05-00) oraz R46 (w 0E-01-10-22). Tak więc w okolicy miejsca 0E-01-02-21 znajduje się 5 innych kompletowanych produktów. Analogicznie postępujemy w przypadku pozostałych lokalizacji. Wartości zmiennych opisujących każde umiejscowienie, w którym znajdują się buty o rozmiarze 40 przedstawia tabela 4.

**Tabela 4.** Wartości zmiennych dla butów w rozmiarze 40 w każdej lokalizacji

| Lokalizacja | $x_1$       | $x_2$ | $x_3$ |
|-------------|-------------|-------|-------|
| 0E-01-02-21 | 0,002227171 | 1     | 5     |
| 0D-08-03-22 | 0,002       | 1     | 6     |
| 0D-08-12-11 | 0,005714286 | 1     | 6     |
| 0C-23-08-40 | 0,007874016 | 0,7   | 0     |

Po standaryzacji zmiennych, wyznaczeniu wzorca rozwoju, obliczeniu średnich ważonych odległości od wzorca, wyznaczono wartości wskaźnika *TMAL* oraz uszeregowano lokalizacje według stopnia ich atrakcyjności z punktu widzenia skompletowania butów w rozmiarze 40. Przedstawia je tabela 5.

**Tabela 5.** Wartości *TMAL* dla każdej lokalizacji i ich pozycja w rankingu

| Lokalizacja | <i>TMAL</i> | Pozycja |
|-------------|-------------|---------|
| 0E-01-02-21 | 0,19815138  | 2       |
| 0D-08-03-22 | 0,175347388 | 3       |
| 0D-08-12-11 | 0,696795669 | 1       |
| 0C-23-08-40 | 0           | 4       |

Z punktu widzenia *Taksonomicznej Miary Atrakcyjności Lokalizacji* najbardziej atrakcyjna jest lokalizacja 0D-08-12-11 i ją należy odwiedzić, ażeby skompletować 10 par butów w rozmiarze 40. Taką samą procedurę zastosowano dla butów w rozmiarze 42 i tam wybrano pozycję 0P-05-01-00.

Podsumowując, należy odwiedzić następujące lokalizacje: 0D-08-09-03; 0D-08-12-11; 0D-08-12-01; 0P-05-01-00; 0P-05-05-00; 0D-07-12-11.

Następnym etapem jest wyznaczenie drogi, którą pokona magazynier. Można ją wyznaczyć, poszukując rozwiązania optymalnego zagadnienia komiwojażera albo skorzystać z heurystycznych metod wyznaczenia trasy, takich jak metody *s-shape*, *midpoint*, *largest gap*, *return* czy *combined* [Tarczyński, 2012, s. 105-120]. Należy jednak zauważyć, że nie każda metoda może być zastosowana w każdym magazynie. W przypadku rozpatrywanego magazynu, z powodu nietypowego rozstawienia sektorów i regałów w sektorach (w sektorach wysokiego składowania regały można obejść wyłącznie z jednej strony, mniej więcej w dwóch trzecich długości regału, licząc od startu, zrobione jest przejście pod regałami, którym magazynier może przejść), można stosować tylko niektóre z nich. W sektorach niskiego składowania w zasadzie można wykorzystać wszystkie metody heurystyczne, a w sektorach wysokiego składowania jedynie metodę zbliżoną do *return* zmodyfikowaną możliwością przejścia pod regałami. Ponieważ w tym przykładzie poza lokalizacjami 0P-05-01-00 oraz 0P-05-05-00 wszystkie pozostałe leżą w jednej alejce, zastosowano metodę *return*. Kolejność odwiedzania poszczególnych lokalizacji i kompletowane produkty przedstawia tabela 6.



**Tabela 6.** Kolejność odwiedzania poszczególnych lokalizacji i zbierane w nich produkty

| Kolejność | Lokalizacja | Zbierane produkty              |
|-----------|-------------|--------------------------------|
| 1         | 0P-05-01-00 | R42 - 80 sztuk, R43 - 80 sztuk |
| 2         | 0P-05-05-00 | R44 - 80 sztuk; R45 - 50 sztuk |
| 3         | 0D-07-12-11 | R46 - 10 sztuk                 |
| 4         | 0D-08-09-03 | R39 - 10 sztuk                 |
| 5         | 0D-08-12-01 | R41 - 10 sztuk                 |
| 6         | 0D-08-12-11 | R40 - 10 sztuk                 |

## Podsumowanie

W artykule zastosowano proste metody taksonomiczne do wyznaczenia lokalizacji, które należy odwiedzić w celu skompletowania zamówienia. Wykorzystano metodę porządkowania liniowego – zbudowano *Syntetyczny Miernik Rozwoju*, nazwany tutaj *Taksonomiczną Miarą Atrakcyjności Lokalizacji*. Powodem zastosowania tej metody jest jej prostota obliczeniowa, duża elastyczność i łatwość implementacji. We wskaźniku tym wykorzystano takie zmienne jak: odległość, stopień zaspokojenia zapotrzebowania i liczbę innych, kompletowanych produktów w danej okolicy. Należy zauważyć, że wskaźnik ten jest na tyle elastyczny, że w jego konstrukcji można stosować inne zmienne diagnostyczne, można inaczej ustalić wagę przypisaną każdej z nich, zależnie od woli decydenta. Metodę tę można też modyfikować, żeby uzyskać inne kryterium wyboru lokalizacji. W zaproponowanej metodzie chodziło o wybór takiej kombinacji cech, aby wybrane miejsca były z jednej strony możliwie blisko siebie, żeby w jednej lokalizacji dało się zebrać możliwie całe zamówienie dotyczące danego produktu (i, o ile to możliwe, zebranie w niej też innych produktów) oraz żeby lokalizacje te były możliwie blisko od punktu startowego. Nie jest to jedyne kryterium, które można stosować przy wyborze lokalizacji. Innym kryterium (także pochodzącym z praktyki gospodarczej) jest wybór takich pozycji, w których są niewielkie ilości kompletowanych produktów w celu oczyszczenia z nich jak największej liczby lokalizacji kosztem czasu procesu kompletacji [Dmytrów, 2013, s. 23-36].

Celem dalszych badań w tym zakresie będzie próba wyboru optymalnych wag przypisanych każdej cesze z punktu widzenia łącznej drogi, którą pokona magazynier w procesie kompletacji. Autor podejmie także próbę zastosowania innych metod klasyfikacji, na przykład metody *GDM*, czy *TOPSIS*.

## Literatura

- Bartholdi J.J., Hackman S.T. (2014), *WAREHOUSE & DISTRIBUTION SCIENCE, Release 0.96*, The Supply Chain and Logistics Institute, School of Industrial and Systems Engineering, Georgia Institute of Technology, USA, Atlanta.
- De Koster R., Le-Duc T., Roodbergen K.J. (2007), *Design and control of warehouse order picking: a literature review*, „European Journal of Operational Research”, No. 182(2), s. 481-501.
- Dmytrów K. (2013), *Procedura kompletacji zakładająca oczyszczanie lokalizacji*, „Studia i Prace Wydziału Nauk Ekonomicznych i Zarządzania”, nr 31, Tom 2, Szczecin, s. 23-36.
- Gudehus T., Kotzab H. (2012), *Comprehensive Logistics, Second Edition*, Springer-Verlag Berlin Heidelberg.
- Hellwig Z. (1968), *Zastosowanie metody taksonomicznej do typologicznego podziału krajów ze względu na poziom rozwoju oraz zasoby i strukturę wykwalifikowanych kadr*, „Przegląd Statystyczny”, nr 15.4.
- Nowak E. (1990), *Metody taksonomiczne w klasyfikacji obiektów społeczno-gospodarczych*, PWE, Warszawa.
- Ostasiewicz W. (red.) (1998), *Statystyczne metody analizy danych*, Wydawnictwo Akademii Ekonomicznej im. Oskara Langego we Wrocławiu, Wrocław.
- Tarczyński G. (2012), *Analysis of the impact of storage parameters and the size of orders on the choice of the method for routing order picking*, „Operations Research and Decisions”, No. 22, s. 105-120.

### TAXONOMIC SUPPORT OF SELECTION OF LOCATIONS IN THE PROCESS OF ORDER-PICKING

**Summary:** There are two types of storage in warehouse – dedicated and shared. In dedicated storage each product is assigned to one location and *vice versa*. More effective in terms of space utilisation, more effective is shared storage. In such case each product can theoretically be assigned to any number of locations and *vice versa*. In the process of order-picking, one product can be picked from several different locations. Locations that must be visited by the warehouse worker in the process of order-picking will be selected by means of taxonomic methods. Every location will be described by means of several diagnostic variables, and its attractiveness will be determined by means of *Taxonomic Measure of Location's Attractiveness* (Polish abbreviation – *TMAL*).

**Keywords:** warehouse management, order-picking, taxonomy, linear ordering.



**Mariusz Doszyń**

Uniwersytet Szczeciński  
Wydział Nauk Ekonomicznych i Zarządzania  
Instytut Ekonometrii i Statystyki  
Katedra Ekonometrii  
mariusz.doszyn@wneiz.pl

**Krzysztof Dmytrów**

Uniwersytet Szczeciński  
Wydział Nauk Ekonomicznych i Zarządzania  
Instytut Ekonometrii i Statystyki  
Katedra Badań Operacyjnych  
i Zastosowań Matematyki w Ekonomii  
krzysztof.dmytrow@usz.edu.pl

## **OBCIĄŻENIE MAGAZYNU W KONTEKŚCIE TRAFNOŚCI SYSTEMU PROGNOZ SPRZEDAŻY**

**Streszczenie:** Celem artykułu jest zobrazowanie wpływu trafności systemu prognoz sprzedaży na stan zapasów produktów w rzeczywiście funkcjonującym magazynie. Trafność prognoz wyznaczanych na podstawie stosowanego systemu prognoz została porównana z prognozami naiwnymi, które stanowią punkt odniesienia. Przeanalizowano również wpływ każdego z wymienionych sposobów prognozowania na obciążenie magazynu i stopień realizacji popytu.

**Słowa kluczowe:** gospodarka magazynowa, prognozowanie, system prognoz, błędy prognoz.

### **Wprowadzenie**

W dużych centrach magazynowo-dystrybucyjnych zarządzanie opiera się w dużej mierze na następującej „triadzie”:

- system prognostyczny (prognozowanie sprzedaży),
- zamówienia do dostawców,
- zamówienia klientów.

Od trafności prognoz sprzedaży zależy poziom zaspokojenia popytu (stopień realizacji zamówień zgłaszanych przez klientów) [Sarjusz-Wolski, 2000]. Przy występującej jednocześnie nadpodaży dóbr, jakość obsługi (dostępność produktów) to ważny czynnik wpływający na przewagę konkurencyjną przedsiębiorstw. Od poziomu i struktury prognoz zależy również poziom zamówień

do dostawców, a to z kolei determinuje obciążenie magazynu (większe zapelnienie, wyższe koszty magazynowania itd.). Tego typu powiązania implikują konieczność analizowania systemu prognostycznego (systemu prognoz sprzedaży), w powiązaniu z gospodarką magazynową i poziomem zaspokojenia popytu [Mentzer, Bienstock, 1998]. Celem niniejszego artykułu jest zaprezentowanie tego typu powiązań z wykorzystaniem danych dla realnie funkcjonującego przedsiębiorstwa.

## 1. Charakterystyka systemu prognostycznego

Analizowana firma to centrum magazynowo-dystrybucyjne przedsiębiorstwa o zasięgu międzynarodowym, z siedzibą w pobliżu Szczecina. Na początku każdego tygodnia obliczane są 5-tygodniowe prognozy wielkości sprzedaży dla ok. 12 tys. produktów. Sprzedawane wyroby to różnego rodzaju narzędzia, odzież robocza, akcesoria wykorzystywane w mechanice samochodowej, w budownictwie, przyrządy pomiarowe itp. Większość produktów charakteryzuje się niską częstotliwością sprzedaży, rozumianą jako udział tygodni z dodatnią sprzedażą (w ogólnej liczbie analizowanych tygodni). Szeregi czasowe sprzedaży są nieregularne, cechują się dużą zmiennością i brakiem jednoznacznych prawidłowości.

W literaturze poświęconej systemom prognozowania sprzedaży zaleca się zazwyczaj stosowanie metod analizy szeregów czasowych czy też różnego rodzaju modeli ekonometrycznych [Mentzer, Bienstock, 1998]. Rzadziej postuluje się wyznaczanie prognoz na podstawie rozkładów teoretycznych sprzedaży [zob. m.in. Sarjusz-Wolski, 2000]. Wytyczne odnośnie tego typu systemów są zazwyczaj bardzo ogólne [zob. Mentzer, Bienstock, Kahn, 1998; Mentzer, Kahn, 1995].

System prognostyczny<sup>1</sup> skonstruowano tak, że metoda prognozowania dla każdego produktu jest wybierana poprzez minimalizację 5-tygodniowego błędu *ex post* (pierwiastek błędu średniokwadratowego – *RMSE*)<sup>2</sup>. Dla każdego szeregu czasowego system prognostyczny sam „wybiera” metodę najlepszą do prognozowania sprzedaży. W przypadku każdego towaru wybierana jest zatem ta metoda, dla której błąd *RMSE* osiąga minimum.

W systemie dostępne są następujące metody:

1. Rozkład empiryczny (mediana).
2. Rozkład Poissona (mediana).
3. Rozkład gamma (mediana).

<sup>1</sup> Opisany system prognostyczny został skonstruowany przez jednego z autorów i jest stosowany w bieżącej działalności przedsiębiorstwa.

<sup>2</sup> Podstawowe zagadnienia dotyczące systemów prognostycznych opisywane są w: [Dittmann, 1996, 2004].

4. Średnia ruchoma (10-tygodniowa).
5. Model Browna (stała wygładzania  $\alpha = 0,2$ ).
6. Model Holta (stałe wygładzania  $\alpha = 0,2, \beta = 0,2$ ).
7. Prognozowanie na podstawie mediany z wartości niezerowych z uwzględnieniem średniego okresu między zamówieniami.
8. Prognozowanie na podstawie mediany z wielkości niezerowych z uwzględnieniem sekwencji sprzedaży z ostatnich pięciu tygodni.

W pierwszych trzech metodach prognozy obliczane są na podstawie mediany odpowiedniego rozkładu. Stosowanie statystyk pozycyjnych wynika z silnej asymetrii prawostronnej rozkładów wielkości sprzedaży dla analizowanych produktów. Kolejne trzy metody to proste modele wygładzania wykładniczego. Na podstawie przeprowadzonych eksperymentów, w modelu Browna i Holta przyjęto, że stałe wygładzania wynoszą 0,2. Ostatnie dwie metody (metoda nr 7 i 8) uwzględniają specyfikę sprzedaży w badanym przedsiębiorstwie. W metodzie 7 wykorzystuje się informację, że część produktów jest zamawiana w mniej więcej stałych odstępach. W przypadku pewnej klasy wyrobów pojawiają się podobne sekwencje sprzedaży, co uwzględnia metoda nr 8.

Warto dodać, że poza wymienionymi rozpatrywane były również inne metody prognozowania (zaawansowane metody analizy szeregów czasowych, modele ekonometryczne itp.), nie dawały one jednak zadowalających rezultatów, dodatkowo komplikując system prognostyczny.

Przy tworzeniu systemu prognoz brane pod uwagę były różnego rodzaju modele tendencji rozwojowych. Jednak szeregi czasowe sprzedaży są bardzo nieregularne, rzadko wykazują czytelne prawidłowości, w związku z czym modele tego typu prowadziły do prognoz o dużych błędach. W literaturze dotyczącej prognoz sprzedaży wskazuje się czasem na możliwość stosowania modeli typu ARIMA [Dittmann, 1996]. Podjęta została próba zaaplikowania tego typu modeli w omawianym systemie prognostycznym. Jednakże w większości przypadków prowadziły one do prognoz *ex post* istotnie odbiegających od wartości empirycznych<sup>3</sup>. Z kolei przy konstruowaniu przyczynowo-opisowych modeli ekonometrycznych poważnym problemem okazał się wybór zmiennych objaśniających.

W omawianym systemie prognostycznym częstość prognoz jest dostosowana do faktycznej częstości sprzedaży analizowanych produktów w okresie, z którego pochodzą dane. Częstość (tygodniowa) sprzedaży danego wyrobu jest tutaj

---

<sup>3</sup> W wielu przypadkach modele ARIMA redukowały się do modeli MA(1), a więc prognozy sprowadzały się praktycznie do prognoz naiwnych.

rozumiana jako udział tygodni o dodatniej sprzedaży w liczbie tygodni ogółem. Prognozy są również korygowane m.in. ze względu na możliwość występowania efektów sezonowych.

Prognozy wyznaczane na podstawie omawianego systemu były porównywane z prognozami naiwnymi. W systemie prognoz naiwnych przyjęto, że prognoza jest na poziomie ostatniej zrealizowanej wielkości sprzedaży, przy czym prognozy te zostały dodatkowo skorygowane tak, aby częstość prognoz była (z możliwym przybliżeniem) taka, jak rzeczywista częstość sprzedaży danego produktu (w badanym okresie).

Zapas bezpieczeństwa w każdym z analizowanych przypadków był liczony generalnie jako odchylenie o rozpiętości trzech decyli (od mediany). Zapasy bezpieczeństwa odnoszą się do 3-tygodniowego terminu realizacji dostaw i są w badanym przedsiębiorstwie również uzależniane od (tygodniowej) częstości sprzedaży produktów.

Do oceny trafności prognoz zaproponowano błąd skonstruowany specjalnie na potrzeby omawianego systemu prognostycznego. Wadą większości miar dokładności prognoz *ex post* jest to, że mogą być obliczane tylko wtedy, gdy sprzedaż jest dodatnia ( $y_T > 0$ ). Zazwyczaj stosowane błędy procentowe (np. MPE, MAPE, współczynniki Theila, etc.) mają w mianowniku wartości empiryczne z okresu weryfikacji prognoz. Jak zatem mierzyć trafność prognoz w przypadku rzadko sprzedawanych produktów? Pomocny może być tutaj następujący błąd, który wyznaczany jest dla poniższych przypadków<sup>4</sup>:

- $D_2 = \frac{\sum_{T=1}^k y_{Tp} - \sum_{T=1}^k y_T}{\max\{\sum_{T=1}^k y_{Tp}, \sum_{T=1}^k y_T\}}$ ,      jeżeli  $\sum_{T=1}^k y_T \neq \sum_{T=1}^k y_{Tp}$ ,
- $D_2 = 0$ ,      jeżeli  $\sum_{T=1}^k y_T = \sum_{T=1}^k y_{Tp}$ .

gdzie

$k$  – liczba prognoz,

$y_{Tp}$  – wartość prognozy w tygodniu  $T$ ,

$y_T$  – sprzedaż w tygodniu  $T$ .

W tym miejscu pojawia się pytanie: dlaczego uwzględniać dwa przypadki? Drugi przypadek w powyższym wzorze ma uwzględniać sytuację, w których prognozy i sprzedaż są równe zero, a więc mamy do czynienia z symbolem nieoznaczonym. Tego typu przypadki są w rozważanym przedsiębiorstwie bardzo częste.

Wyodrębnienie dwóch przypadków nie wymusza również założenia, że mianownik we wzorze musi być większy od zera. Jeśli mianownik jest równy zero, to licznik też musi być równy zero (w mianowniku osiąga maksimum), dlatego też występuje przypadek drugi, w którym błąd jest równy zero.

<sup>4</sup> Jest to propozycja autorska.

Analizując prezentowany błąd, trzeba mieć na uwadze, że w liczniku nie występuje wartość bezwzględna (mianownik jest zawsze nieujemny), co oznacza, że błędy o różnych znakach się znoszą. Między innymi z tego powodu analizowane są rozkłady błędu. Znak błędu niesie ze sobą ważną informację o tym, czy prognozy są zawyżone, czy też zaniżone, a tego typu sygnały są ważne w bieżącym zarządzaniu przedsiębiorstwem.

Omawiany błąd jest znormalizowany i należy do przedziału  $D_2 \in (-1; 1)$ . Jeśli suma prognoz jest niższa od sumy wartości rzeczywistych, to błąd  $D_2$  jest ujemny. Jeśli suma prognoz jest wyższa od sumy wartości rzeczywistych, to błąd  $D_2$  jest dodatni. Jeżeli suma prognoz jest taka, jak suma wartości empirycznych, to błąd  $D_2 = 0$ .

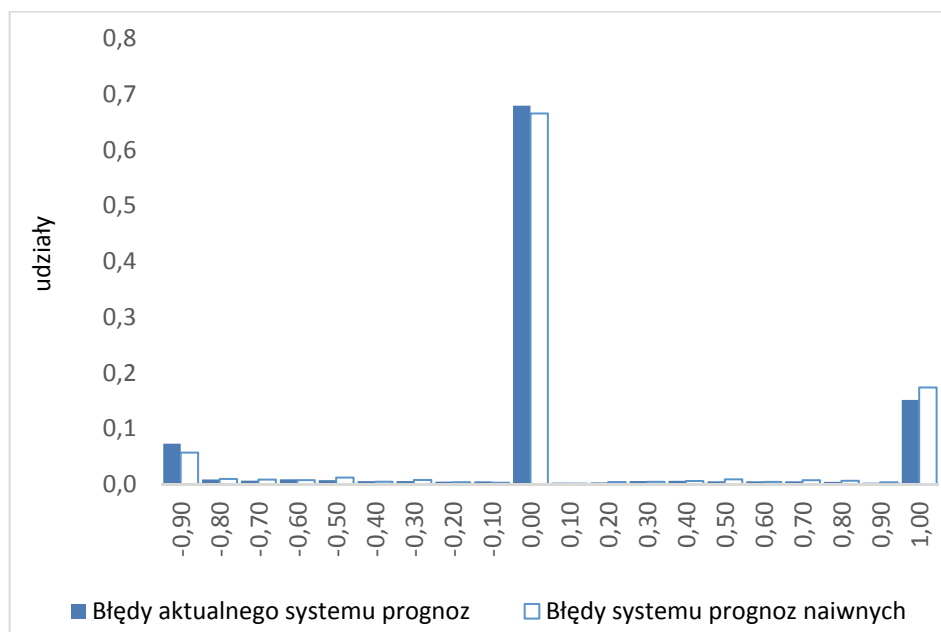
Błąd ten także umożliwia analizowanie przypadków „skrajnych”, w których sprzedaż lub (oraz) prognozy są równe zero. Jeśli sprzedaż jest zerowa, a prognozy są dodatnie, to  $D_2 = 1$ . Z kolei, gdy sprzedaż jest dodatnia, a prognozy zerowe, to  $D_2 = -1$ . Są to przypadki ważne z punktu widzenia zarządzania przedsiębiorstwem. Jeżeli celem przedsiębiorstwa jest jak najlepsze zaspokojenie popytu, to szczególną wagę należy przywiązywać do prognoz, dla których  $D_2 = -1$ . Z kolei, gdy ważniejsze jest zmniejszanie obciążenia magazynu, należy większą uwagę przywiązywać do prognoz, dla których  $D_2 = 1$ .

## 2. Ilustracja empiryczna

Korzyści ze stosowania systemu prognoz zbadano na trzy sposoby. Po pierwsze, porównano trafność aktualnego systemu prognoz z trafnością systemu prognoz naiwnych poprzez obliczenie opisanego błędu *ex post*. Po drugie, porównano zamówienia do dostawców wygenerowane na podstawie obu systemów prognozy. Po trzecie, zestawiono zamówienia wygenerowane za pomocą obu systemów prognoz z rzeczywistymi zamówieniami złożonymi przez klientów.

### 2.1. Trafność prognoz

Trafność obu systemów prognoz zbadano za pomocą błędu prognoz *ex post*. Rozkłady błędu przedstawia rys. 1.



**Rys. 1.** Porównanie trafności systemów prognoz

W obu systemach prognoz dominowały produkty, dla których błąd względny *ex post* wyznaczony dla obu systemów był równy 0 (czyli prognozy były dokładnie takie, jak rzeczywista wielkość sprzedaży). W przypadku aktualnego systemu prognoz było to 68% produktów, w przypadku prognoz naiwnych – 67%. Należy jednak nadmienić, że w ogromnej większości dotyczyło to produktów, w których zarówno prognozy, jak i sprzedaż były równe 0. Relatywnie duże są także błędy na obu krańcach przedziału zmienności błędu *ex post*. W przypadku, gdy sprzedaż była wyższa od prognoz (prognozy były zaniżone), błąd przyjmował wartość ujemną. Jego wartość na samym końcu przedziału (równa -1) wskazuje odsetek produktów, dla których prognozy były równe 0, a sprzedaż dodatnia. Aktualny system prognoz wypadł pod tym względem nieco gorzej niż system prognoz naiwnych. W jego przypadku wystąpiło 7,3% takich produktów, w przypadku prognoz naiwnych – 5,7%. Z kolei na drugim końcu przedziału zmienności występują produkty, w których sprzedaż była równa 0, a prognozy dodatnie. W systemie prognoz takich produktów było 15,1%, a w systemie prognoz naiwnych – 17,4%. Tak więc pod tym względem aktualny system prognoz dał nieco lepsze wyniki niż system prognoz naiwnych. Podsumowując, trudno jest jednoznacznie wykazać wyższość któregośkolwiek systemu na podstawie przedstawionego błędu *ex post*. Wynika to z tego, że analizowane szeregi czasowe sprzedaży zazwyczaj charak-



teryzowały się wysoką entropią, rozumianą jako duży udział zmienności losowej. Brak wyraźnych prawidłowości bardzo komplikuje prognozowanie szeregów czasowych sprzedaży, jednak jakość otrzymywanych wyników można uznać za zadowalającą (na potrzeby zarządzania badanym przedsiębiorstwem).

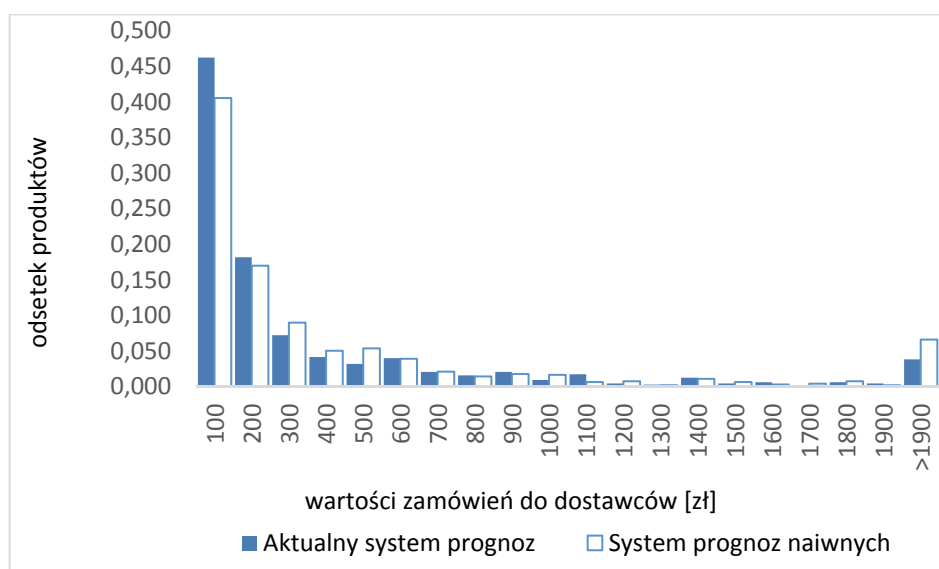
## 2.2. Porównanie zamówień do dostawców

Za pomocą obu systemów prognoz wygenerowano zamówienia do dostawców. Zależą one w głównej mierze od poziomu prognoz. Liczbę zamawianych pozycji oraz łączną wartość zamówień dla obu systemów przedstawia tabela 1.

**Tabela 1.** Liczba zamawianych produktów oraz wartość zamówień wyznaczona dla obu systemów prognoz (w zł)

|                              | Aktualny system prognoz | System prognoz naiwnych |
|------------------------------|-------------------------|-------------------------|
| Liczba zamawianych produktów | 621                     | 888                     |
| Łączna wartość zamówień [zł] | 252 054,35              | 471 226,59              |

Jak wynika z powyższej tabeli, aktualnie stosowany system prognoz wygenerował konieczność zamówienia 621 produktów, a system prognoz naiwnych – 888. Jeżeli chodzi o łączną wartość zamówień, to dla prognoz naiwnych była ona prawie dwukrotnie wyższa. Strukturę wartości zamówień dla obu systemów przedstawia rys. 2.



**Rys. 2.** Struktura wartości zamówień do dostawców dla badanych systemów prognoz

Dla obu systemów prognoz przeważały produkty o wartości zamówienia do 100 zł. W aktualnym systemie prognoz produkty te stanowiły ponad 46%, a w systemie prognoz naiwnych – 40,5%. Rozkład wartości zamówień jest skrajnie prawostronnie asymetryczny, relatywnie znaczącą (w sensie wartościowym) grupę stanowią produkty, dla których zamówienia opiewały na łączną wartość powyżej 1900 zł. W systemie aktualnym produktów takich było niecałe 4%, a w systemie prognoz naiwnych – 6,6%. Różnice w strukturze mogą się wydawać na pierwszy rzut oka niewielkie, ale wyraźne różnice w wysokości pierwszego i ostatniego przedziału wykresu w głównym stopniu przełożyły się na duże różnice w łącznej wartości zamówień. W celu pełniejszego zobrazowania struktury wartości zamówień, obliczono wybrane pozycyjne parametry rozkładu. Przedstawia je tabela 2.

**Tabela 2.** Parametry rozkładu wartości zamówień do dostawców [zł]

| Statystyka | Aktualny system prognoz | System prognoz naiwnych |
|------------|-------------------------|-------------------------|
| $Q_{1,4}$  | 39,128                  | 49,776                  |
| M          | 120,480                 | 155,483                 |
| $Q_{3,4}$  | 381,764                 | 464,703                 |
| Q          | 171,318                 | 207,463                 |

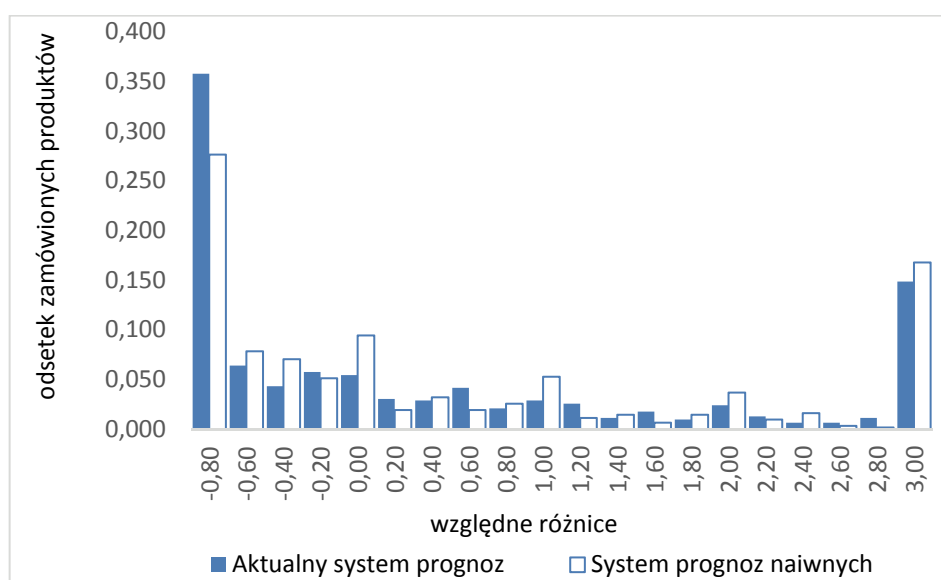
Z powyższej tabeli wynika, że indywidualne zamówienia składane na podstawie prognoz naiwnych miały znacznie wyższe wartości. Mediana była wyższa o ok. 35 zł, kwartył pierwszy o 10, a kwartył trzeci – o ponad 80 zł. Świadczy to zarówno o wyższym poziomie wartości zamówień, jak i o większej ich zmienności, co widoczne jest w wartości odchylenia ćwiartkowego.

Z wielkością zamówień związany jest także poziom zapasów bezpieczeństwa. Dla analizowanych systemów prognoz ich poziomy były zbliżone.

### 2.3. Porównanie stopnia realizacji zamówień klientów

Działanie obu systemów prognoz zostało porównane z rzeczywistymi zamówieniami złożonymi przez klientów. W badanym okresie klienci zamówili 626 pozycji. Już na podstawie tej wielkości można wnioskować, że aktualny system prognoz lepiej dostosowuje się do zmian, ponieważ analizując liczbę zamówionych u dostawców pozycji (tabela 1), system aktualny wygenerował zamówienia dla 621 pozycji, a system prognoz naiwnych aż 888, co może świadczyć, że duża liczba produktów była zamówiona niepotrzebnie, podnosząc poziom zapasów. Porównując prognozy sprzedaży z rzeczywistymi zamówieniami klientów, obliczono względne odchylenia pomiędzy zamówieniami klientów a prognozami. Im są one większe, tym oczywiście gorzej. Mogą być ujemne (gdy

prognoza nie doszacowała rzeczywistej sprzedaży produktu) albo dodatnie (gdy sprzedaż była przeszacowana). Z dwojga złego, zdecydowanie gorsze jest jednak niedoszacowanie sprzedaży (gdyż zmniejsza poziom obsługi klienta). Strukturę względnych odchyłeń prognoz od rzeczywistych zamówień klientów dla obu systemów prognoz przedstawia rys. 3.



**Rys. 3.** Struktura względnych odchyłeń prognoz od zamówień klientów dla obu systemów prognoz

Jak widać z powyższego wykresu, dla obu systemów prognoz największe grupy produktów to takie, w których prognozy były zaniżone w stosunku do zamówień o ponad 80% (pierwszy słupek na wykresie) i takie, dla których prognozy były zawyżone o ponad 300% (ostatni przedział). Dla aktualnego systemu prognoz było więcej produktów, gdzie prognozy były najbardziej zaniżone – aż 36%. W przypadku systemu prognoz naiwnych takich produktów było niecałe 28%. Z kolei największe zawyżenie prognoz dla aktualnego systemu występowało w 15% produktów, a dla systemu prognoz naiwnych – w 17%. Ogólnie nie ma większej różnicy w strukturze względnych odchyłeń prognoz od zamówień klientów.

Warto w tym miejscu dodać, że dostępność, liczona jako frakcja zamówień zrealizowanych w 100%, była na poziomie ponad 92%, co wskazuje na wysokie zaspokojenie popytu. Wyznaczany zapas bezpieczeństwa pozwalał na realizację większości zamówień, w tym także tych, które przewyższają prognozowaną wielkość sprzedaży.

Dokładniejszego porównania struktury można dokonać, porównując ze sobą wybrane pozycyjne parametry struktury prognoz wyznaczonych dla produktów zamawianych przez klientów. Przedstawia je tabela 3.

**Tabela 3.** Parametry rozkładu wielkości prognoz dla produktów zamawianych przez klientów

| Statystyka | Aktualny system prognoz | System prognoz naiwnych |
|------------|-------------------------|-------------------------|
| $Q_{1,4}$  | -1,000                  | -0,900                  |
| M          | -0,243                  | -0,060                  |
| $Q_{3,4}$  | 1,191                   | 1,606                   |
| Q          | 1,095                   | 1,253                   |

Porównanie parametrów struktury produktów zamawianych w danym tygodniu przez klientów dla obu systemów prognoz przedstawia się dość interesująco. Widać, że dla systemu prognoz naiwnych wartość środkowa wyniosła -0,06, czyli była bliska 0. Tak więc mniej więcej dla połowy produktów prognozy były zaniżone, a dla drugiej połowy były zawyżone. W przypadku aktualnego systemu prognoz mediana wyniosła -0,243, czyli prognozy były zaniżone w stosunku do rzeczywistej wielkości zamówień dla więcej, niż połowy produktów. Żeby porównać to dokładnie, sprawdzono, które percentyle były równe zero dla obu systemów prognoz. Dla systemu aktualnego był to percentyl pięćdziesiąty szósty, a dla systemu prognoz naiwnych – pięćdziesiąty pierwszy. Tak więc nie ma pod tym względem większych różnic. Świadczy to o dużej asymetrii rozkładu, co potwierdza rys. 3. Widać także, że badane odchylenia mają znacznie wyższą zmienność dla prognoz naiwnych, co z kolei wynika z tego, że dla większego odsetka produktów prognozy te były zawyżone.

## Podsumowanie

W artykule porównano trafność prognoz wyznaczonych na podstawie aktualnie stosowanego systemu prognoz ze zmodyfikowanym systemem prognoz naiwnych. Aktualny system prognoz wygenerował znacznie niższe prognozy, co przełożyło się na istotnie niższe zamówienia do dostawców. Wartość zamówień przy założeniu stosowania systemu prognoz naiwnych była prawie dwukrotnie wyższa niż w przypadku stosowania aktualnego systemu prognoz, co prowadzi do znacząco większego obciążenia magazynu. Z drugiej strony, prognozy obliczone według aktualnego systemu częściej były zaniżone w stosunku do rzeczywistych zamówień od klientów, a prognozy naiwne nierzadko zawyżone. Poziom obsługi klienta był jednak dla obu systemów zbliżony (mimo większego zaniżenia prognoz w przypadku systemu aktualnego), dzięki podobnym poziomom zapasów bezpieczeństwa. Należy zaznaczyć, że poziom obsługi klienta jest

w badanym przedsiębiorstwie rozumiany jako udział produktów, na które zamówienia zrealizowano w 100%. W takim ujęciu różni się on od najczęściej podawanych w literaturze rodzajów poziomów obsługi klienta [Nahmias, 2001]. Wszystkie te aspekty razem potwierdzają zasadność stosowania aktualnego systemu prognoz, gdyż dzięki niemu można znacznie obniżyć poziom zapasów i zamrozić w nich mniejszą ilość środków finansowych. Przedmiotem dalszych badań w tym zakresie będzie kolejne doskonalenie aktualnego systemu prognoz, w celu zwiększenia dopasowania ich do rzeczywistej wielkości i struktury sprzedaży.

## Literatura

- Cole J.J. (2002), *Zarządzanie logistyczne*, PWE, Warszawa.
- Dittmann P. (1996), *Metody prognozowania sprzedaży w przedsiębiorstwie*, Wydawnictwo AE im. O. Langego we Wrocławiu, Wrocław.
- Dittmann P. (2004), *Prognozowanie w przedsiębiorstwie*, Oficyna Ekonomiczna, Kraków.
- Makridakis S. (1996), *Forecasting: Its role and value for planning and strategy*, „International Journal of Forecasting” 2, s. 513-537.
- Mentzer J.T., Bienstock C.C. (1998), *The Seven Principles of Sales Forecasting Systems*, „Supply Chain Management Review”, 34(4), s. 76-83.
- Mentzer J.T., Bienstock C.C., Kahn K.B. (1999), *Benchmarking sales forecasting management*, „Business Horizons”, 42, s. 48-56.
- Mentzer J.T., Kahn K.B. (1995), *Forecasting technique familiarity, satisfaction, usage, and application*, „Journal of Forecasting”, 14(5), s. 465-476.
- Nahmias S. (2001), *Production and operations analysis*, Fourth Edition, McGraw-Hill.
- Sarjusz-Wolski Z. (2000), *Sterowanie zapasami w przedsiębiorstwie*, PWE, Warszawa.

## OCCUPANCY OF THE MAGAZINE IN THE CONTEXT OF ACCURACY OF SALES FORECASTING SYSTEM

**Summary:** The main aim of the article was to illustrate the impact of the accuracy of sales forecasting system on the state of products in actually functioning warehouse located near Szczecin. Forecasts accuracy was also referred to level of demand satisfaction. Accuracy of the forecasts obtained on the basis of functioning forecasting system was compared with naïve forecasts which are taken as a reference point. Influence of each of the forecasting procedures on warehouse occupancy and demand satisfaction was analysed. The general conclusion is that forecasts accuracy and level of demand satisfaction were quite similar both for actual and naïve forecasts system, but naïve forecasts led to much higher occupancy of the warehouse.

**Keywords:** warehouse management, forecasting, forecasting system, forecasting errors.



### Helena Gaspars-Wieloch

Uniwersytet Ekonomiczny w Poznaniu  
Wydział Informatyki i Gospodarki Elektronicznej  
Katedra Badań Operacyjnych  
Helena.gaspars@ue.poznan.pl

## O REGULE DECYZYJNEJ WSPIERAJĄCEJ WIELOKRYTERIALNE POSZUKIWANIE OPTYMALNEJ STRATEGII CZYSTEJ W WARUNKACH NIEPEWNOŚCI

**Streszczenie:** W pracy opisano propozycję nowego podejścia, które można wykorzystać w wielokryterialnym podejmowaniu decyzji w przypadku poszukiwania optymalnej strategii czystej w warunkach niepewności (decydent nie zna bądź nie zamierza skorzystać z informacji o prawdopodobieństwie wystąpienia poszczególnych stanów natury). Prezentowana reguła decyzyjna poprzedzona jest etapem prognostycznym, w ramach którego brane jest pod uwagę nastawienie decydenta do ryzyka (rozumianego jako możliwość uzyskania niekorzystnej wypłaty) mierzone współczynnikiem optymizmu. Etap ten służy do wyłonienia najbardziej „prawdopodobnego” (tj. odzwierciedlającego naturę decydenta) scenariusza bądź zbioru najbardziej „prawdopodobnych” scenariuszy i ma na celu zawężenie pierwotnej macierzy wypłat, na podstawie której wybierana jest najlepsza decyzja. Procedura odwołuje się do planowania scenariuszowego i do metody SF+AS (ang. *Scenario Forecasting + Alternative Selection Method*) przedstawionej w innym artykule i znajdującej zastosowanie w jednokryterialnych problemach decyzyjnych.

**Słowa kluczowe:** strategia czysta, niepewność, planowanie scenariuszowe, wielokryterialne podejmowanie decyzji, współczynnik optymizmu.

### Wprowadzenie

Problematyka wielokryterialnego podejmowania decyzji w warunkach niepewności (WPDN) poruszana jest w wielu pracach, gdyż w rzeczywistych problemach decyzyjnych decydenci najczęściej kierują się więcej niż jednym kryterium, a deterministyczne ustalenie parametrów związanych z poszczególnymi

celami jest często niemożliwe. Przegląd modeli, metod i narzędzi znajdujących zastosowanie w WPDN znajduje się np. w [Durbach i Stewart, 2012].

W niniejszej pracy zaproponowano regułę decyzyjną dla dyskretnej optymalizacji wielocelowej wykorzystującą planowanie scenariuszowe i dotyczącą decyzji realizowanych jednorazowo. Procedura służy do wyłonienia optymalnej strategii czystej w grach z naturą. Zakłada ona, iż macierze wypłat dla poszczególnych kryteriów są zależne. Proponowana metoda uwzględnia zarówno preferencje decydenta związane z optymalizowanymi celami, jak i jego nastawienie do ryzyka, które jest mierzone za pomocą współczynnika optymizmu. Reguła decyzyjna zasadniczo tym różni się od istniejących podejść, iż rozpoczyna się etapem prognostycznym służącym do wyłonienia scenariusza (bądź scenariuszy) odzwierciedlającego naturę decydenta.

Artykuł ma następującą strukturę. Część pierwsza przedstawia najistotniejsze cechy WPDN i założenia przyjęte w pracy. W części drugiej opisano regułę decyzyjną, która może okazać się przydatna w wielokryterialnym poszukiwaniu optymalnej strategii czystej. W części trzeciej zaprezentowano fikcyjny problem decyzyjny i wyznaczono rozwiązanie na podstawie wspomnianej procedury. Wnioski zebrano w zakończeniu.

## **1. Wielokryterialne podejmowanie decyzji w warunkach niepewności**

Pojęcie „niepewność” rozumiane jest w literaturze na wiele różnych sposobów [zob. np. Kopańska-Bródka, 1998; Ogryczak, 2006; Trzpiot, 2006; Kuchta, 2010; Tysza, 2010; Birge i Louveaux, 2011; Domurat i Zieliński, 2013; Słowiński, Kadziński i Greco, 2014]. W niniejszej pracy zostanie wykorzystane podejście Knighta [Knight, 1921], czyli tradycyjne, zgodnie z którym podejmowanie decyzji w warunkach niepewności (PDN) oznacza, iż decydent wybiera odpowiednią strategię (decyzję, wariant decyzyjny) na podstawie zbioru scenariuszy (stanów natury), których prawdopodobieństwo wystąpienia nie jest znane (a jeśli nawet jest znane, to decydent nie zamierza z tej informacji skorzystać), co można określić jako „niepewność bez prawdopodobieństwa” lub „całkowita niepewność” [von Neumann i Morgenstern, 1944; Courtney, Kirkland i Viquerie, 1997; Williams, Smith i Young, 1997; Dominiak, 2006; Render, Stair i Hanna, 2006; Sikora (red.), 2008; Trzaskalik, 2008; Walliser, 2008; Groenewald i Pretorius, 2011].

Prace prezentujące klasyczne reguły decyzyjne oraz ich rozszerzenia dla jednokryterialnego i wielokryterialnego PDN są bardzo liczne [Wald, 1950; Hurwicz,

1952; Savage, 1961; Nakamura, 1986; Schmeidler, 1986; Gilboa i Schmeidler, 1989; Klein, Moskowitz i Ravindran, 1990; Piasecki, 1990; Tversky i Kahneman, 1992; Triantaphyllou i Lin, 1996; Xu, 2000; Ellsberg, 2001; Goodwin i Wright, 2001; Korhonen, 2001; Marinacci, 2002; Tsaur, Chang i Yen, 2002; Yu, 2002; Ghirardato, Maccheroni i Marinacci, 2004; Mikhaidov i Tsvetinov, 2004; Urli i Nadeau, 2004; Stewart, 2005; Dominiak, 2006, 2009; Montibeller, Gummer i Tumidei, 2006; Wang i Elhag, 2006; Ben Amor, Jabeur i Martel, 2007; Gaspars, 2007; Hayashi, 2008; Ramik i in., 2008; Ravindran, 2008; Gilboa, 2009; Ginevičius i Zubrecovas, 2009; Ram, Montibeller i Morton, 2010; Wojownik i Szapiro, 2010; Basili i Chateauneuf, 2011; Ioan i Ioan, 2011; Liu, Fan i Hang, 2011; Etner, Jeleva i Tallon, 2012; Lee, 2012; Gaspars-Wieloch, 2012, 2013, 2014a, 2014b, 2014c, 2014d, 2014e, 2015a, 2015b, 2015c, 2015d; Suo, Li i Huang, 2012; Aghdaie, Zolfani i Zavadskas, 2013; Hopfe, Augenbroe i Hensen, 2013; Janjic, Andjelkovic i Docic, 2013; Michnik, 2013; Durbach, 2014; Eiselt i Marianov, 2014], patrz tabela 1. Warto jednak podkreślić, że większość procedur odwołuje się do rachunku prawdopodobieństwa (np. kumulacyjna teoria perspektywy, maksymalizacja oczekiwanej użyteczności,  $\alpha$ -maksiminowa oczekiwana użyteczność, oczekiwana użyteczność Choqueta), które w tym opracowaniu, zgodnie z przyjętym podejściem Knighta, traktować będziemy jako reguły decyzyjne wspierające podejmowanie decyzji w warunkach niepewności z prawdopodobieństwami.

**Tabela 1.** Przykładowe prace opisujące reguły decyzyjne dla problemów jedno- i wielokryterialnych w warunkach niepewności

| Strategie i problemy | Problemy jednokryterialne                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                 | Problemy wielokryterialne                                                                                                                                                                                                                                                                                                                   |
|----------------------|---------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|---------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|
| Strategie czyste     | Basili, Chateauneuf i Fontini, 2008; Chateauneuf i Cohen, 2000; Ellsberg, 2001; Gaspars, 2007; Gaspars-Wieloch, 2013, 2014a, 2014c, 2014d, 2015a, 2015b, 2015c; Ghirardato, Maccheroni i Marinacci, 2004; Gilboa, 2009; Gilboa i Schmeidler, 1989; Hayashi, 2008; Hurwicz, 1952; Ioan i Ioan, 2011; Karni, 1985; Nakamura, 1986; Piasecki, 1990; Savage, 1961; Wald, 1950 | Ben Amor, Jabeur i Martel, 2007; Dominiak, 2006, 2009; Durbach, 2014; Eiselt i Marianov, 2014; Gaspars-Wieloch, 2014e; Klein, Moskowitz i Ravindran, 1990; Montibeller, Gummer i Tumidei 2006; Liu, Fan, Hang, 2011; Michnik, 2013; Ram, Montibeller i Morton, 2010; Ramik i in., 2008; Ravindran, 2008; Stewart, 2005; Urli i Nadeau, 2004 |
| Strategie mieszane   | Gaspars-Wieloch, 2014b; Gilboa, 2009; Officer i Anderson, 1968; Puppe i Schlag 2009; Sikora, 2008; Wald, 1950                                                                                                                                                                                                                                                             | De Marco i Morgan, 2009; Gaspars-Wieloch, 2015d; Grigorieva, 2014; Lozan i Ungureanu, 2013; Voorneveld, Vermeulen i Borm, 1999; Voorneveld, Grahn i Dufwenverg, 2000                                                                                                                                                                        |

\* Reguły opisane w pracach dotyczących strategii mieszanych i problemów wielokryterialnych znajdują zastosowanie w grach z drugim graczem, a nie w grach z naturą.

Źródło: Opracowanie własne.



Istniejące procedury służą poszukiwaniu optymalnej strategii czystej (wybierany i realizowany jest dokładnie jeden wariant decyzyjny) bądź mieszanej (wybierana i realizowana jest kombinacja strategii czystych). Tutaj skoncentrujemy się na wyborze strategii czystej.

W literaturze znaleźć można opisy metod stosowanych w sytuacji, gdy podjęta decyzja ma być realizowana dokładnie raz lub wielokrotnie. Tutaj rozważymy pierwszy przypadek. Tego typu decyzje są często spotykane w biznesie (fuzje i przejęcia, inwestycje nieruchomości, rozwój nowego produktu, zarządzanie kryzysowe) [Liu i Zhao, 2009; Guo, 2011].

W pracy odwołamy się do planowania scenariuszowego (PS) [Van der Heijden, 1996; Pomerol, 2001], które zdaniem Durbach i Stewart [2012] jest bardzo pomocne w PDN, gdyż nie wymaga od decydenta operowania rachunkiem prawdopodobieństwa, funkcjami przynależności i zbiorami rozmytymi. Zajmiemy się więc WPDN+PS. PS ułatwia identyfikację czynników, które mogą wywrzeć wpływ na efekty podjętych przez nas decyzji. W planowaniu scenariuszowym zakłada się, że wynik dokonanego wyboru zależy od podjętej decyzji i scenariusza, który wystąpi w przyszłości.

Reguła zaproponowana w niniejszym opracowaniu dotyczyć będzie dyskretnej wersji optymalizacji wielocelowej. Oznacza to, iż zbiór możliwych decyzji jest pierwotnie ustalony, skończony i dyskretny. Problem tak zdefiniowany można przedstawić za pomocą  $n$  decyzji ( $D_1, \dots, D_j, \dots, D_n$ ), przy czym każda z nich oceniana jest na podstawie  $p$  kryteriów ( $C_1, \dots, C_k, \dots, C_p$ ) i  $m$  stanów natury ( $S_1, \dots, S_i, \dots, S_m$ ). Wartości dla poszczególnych celów podawane są w odrębnych macierzach wypłat, a każda macierz zawiera  $n \times m$  wypłat. Przyjmijmy, że  $a_{ij}^k$  jest realizacją kryterium  $C_k$  przy założeniu, że wybrana zostanie decyzja  $D_j$  i wystąpi scenariusz  $S_i$ . W artykule ograniczymy się do przypadku, w którym rozkłady wypłat dla wszystkich wariantów decyzyjnych są dyskretne.

We wprowadzeniu zasygnalizowano, że opracowana reguła będzie odpowiednia dla zależnych macierz wypłat. Mamy z nimi do czynienia, gdy przykładowo wybór decyzji  $D_1$  przy jednoczesnym wystąpieniu stanu natury  $S_1$  skutkuje uzyskaniem wypłat  $a_{11}^1, a_{11}^2, \dots, a_{11}^p$  (czyli scenariusz pierwszy obowiązuje w tym przypadku dla wszystkich kryteriów).

Istniejące reguły decyzyjne w różny sposób uwzględniają naturę decydenta, jego nastawienie do ryzyka, rozumianego jako możliwość uzyskania niekorzystnego wyniku [Fishburn, 1984; Dominiak, 2006]. W proponowanej procedurze zastosujemy współczynnik optyimizmu  $\beta \in [0,1]$ , szacowany subiektywnie i intuicyjnie przez samego decydenta.

**Tabela 2.** Macierz wypłat – przykład 1

| Scenariusze i decyzje | D <sub>1</sub> | D <sub>2</sub> | D <sub>3</sub> |
|-----------------------|----------------|----------------|----------------|
| S <sub>1</sub>        | 5              | 4              | 3 (min)        |
| S <sub>2</sub>        | 10 (max)       | 1 (min)        | 7 (max)        |
| S <sub>3</sub>        | 0 (min)        | 8 (max)        | 5              |

Źródło: Opracowanie własne [zaczepnięte z Gaspars-Wieloch, 2015b].

W niektórych podejściach decydent postępuje tak, jakby natura była świadomym przeciwnikiem, który zmienia swoją strategię w zależności od wyboru decydeny. Jest to bardzo widoczne w regułach: Walda, maximax i Hurwicza. W tabeli 2 zaprezentowano wypłaty dla fikcyjnego przykładu. Jak widać, scenariusz S<sub>2</sub> jest najbardziej optymistycznym scenariuszem w przypadku wyboru decyzji D<sub>1</sub> lub D<sub>3</sub> i jest jednocześnie najbardziej pesymistycznym stanem natury dla decyzji D<sub>2</sub>. Oznacza to, że szukając maksymalnych i minimalnych wartości związanych z danym wariantem decyzyjnym w celu wyznaczenia wskaźników dla wspomnianych reguł, raz traktujemy konkretny scenariusz jako niezwykle atrakcyjny, innym razem jako bardzo niekorzystny. Nie ma więc możliwości przypisania danemu stanowi statusu globalnego. Status ten zależy bowiem od wybranej strategii. Taką konstrukcję reguł decyzyjnych mocno skrytykowali Minor [1954] oraz Officer i Anderson [1968]. W zaproponowanej procedurze wykorzystamy współczynnik optymizmu w celu ustalenia statusu dla wszystkich scenariuszy. Dzięki temu ostateczny wybór decydeny będzie dokonywany nie na podstawie „ruchomych” scenariuszy o skrajnych wypłatach, lecz na podstawie scenariuszy o cechach odpowiadających naturze rozpatrywanego decydeny.

## 2. Reguła SF+AS dla wielokryterialnego poszukiwania optymalnej strategii czystej

Ogólne cechy nowej reguły decyzyjnej zostały wymienione w poprzedniej części. Teraz koncepcję przedstawimy szczegółowo. Musimy zastanowić się nie tylko nad tym, jak warto uwzględnić nastawienie decydeny do ryzyka, ale też nad tym, w jaki sposób mierzyć znaczenie kryteriów, jak je agregować, oraz jak połączyć wielokryterialną analizę decyzyjną z planowaniem scenariuszowym.

Pamiętając o krytyce reguł, traktujących scenariusze jako świadomych przeciwników w grze [Milnor, 1954; Officer i Anderson, 1968], skorzystamy z procedury opisanej w [Gaspars-Wieloch, 2015b] i noszącej nazwę SF+AS (*Scenario Forecasting and Alternative Selection*). Regułę opracowano dla problemów jednocelowych, składa się ona z dwóch etapów. W pierwszym, na podstawie zade-

klarowanego współczynnika optymizmu decydenta, wyznacza się scenariusz (ewentualnie scenariusze) odpowiadający(e) jego naturze (im wyższy współczynnik optymizmu decydenta, tym bardziej korzystny scenariusz powinien, jego zdaniem, wystąpić). Status danego scenariusza jest zatem stały, niezależnie od rozpatrywanej decyzji, co oznacza, że w metodzie SF+AS natura nie jest aktywnym graczem, zmieniającym swoją strategię po zapoznaniu się z wyborem decydenta. Status scenariusza określa suma „przypadków dominacji”, ukazująca pozycję wypłat w stosunku do innych wartości w ramach danego wariantu decyzyjnego (dominacja w podejściu wielokryterialnym wykorzystywana jest także np. w [Trzpiot i Zawisza, 2000; Nowak, 2004; Liu i in., 2011; Janjic i in., 2013; Trzaskalik, 2014]). Drugi etap procedury SF+AS polega na wskazaniu odpowiedniej strategii czystej na podstawie wypłat związanych z wybranymi scenariuszami, czyli zredukowanej macierzy wypłat.

Aby znaleźć metodę wielokryterialną dla problemów deterministycznych, którą dałoby się zintegrować z procedurą SF+AS, należy zdecydować się na odpowiedni model łączący analizę wielokryterialną z planowaniem scenariuszowym. Stewart [2005], Durbach i Stewart [2012] oraz Michnik [2013] proponują podział modeli WPDN+PS na dwie klasy: A i B. Klasa A obejmuje modele dwuetapowe, w których oceny poszczególnych decyzji szacowane są oddzielnie ze względu na scenariusze i kryteria. Klasa zawiera dwie podklasy modeli: A-KS i A-SK. W skład podklasy A-KS wchodzi podejścia, w których ocena wariantów odbywa się najpierw względem celów w ramach scenariuszy, następnie względem stanów natury. W podejściach należących do podklasy A-SK kolejność obliczeń jest odwrócona. Klasa B składa się z procedur jednoetapowych, w których generuje się tzw. metakryteria, czyli wartości dla każdej pary scenariusz/kryterium. W związku z przyjętym założeniem o zależności macierz wypłat, zastosujemy model A-KS.

Pozostaje więc kwestia wyboru odpowiedniej metody wielocelowej. W pracy [Trzaskalik (red.), 2014] scharakteryzowano wiele różnych procedur dla WPD (wielokryterialne podejmowanie decyzji), m.in. metody addytywne: SAW, SMART, SMARTER [Churmann i Ackoff, 1954; Edwards i Barron, 1994], AHP, REMBRANDT, ANP [Saaty 1980; 1996; Lootsma, 1993], MACBETH, ZAPROS [Bana e Costa i Chagas, 2004; Larichev i Moshkovich, 1995], ELECTRE (Roy i Bouyssou, 1993), PROMETHEE [Brans, Mareschal i Vincke, 1984], TOPSIS, VIKOR, BIPOLAR [Hwang i Yoon, 1981; Opricovic, 1998; Konarzewska-Gubała, 1989]. Poza wspomnianymi metodami istnieje szereg innych podejść, np. [Kaliszewski i Miroforidis 2010; Kaliszewski i in., 2012]. Nie możemy jednak zastosować dowolnej metody, gdyż specyfika reguły SF+AS i konieczność przyjęcia

modelu A-KS implikują potrzebę spełnienia przez wybraną procedurę wielocelową kilku warunków. Po pierwsze, nie powinna ona charakteryzować się zbyt dużą czasochłonnością czy też stopniem złożoności, ponieważ ma stanowić jedynie etap w całej procedurze. Po drugie, musi być metodą odpowiednią dla zależnych macierzy wypłat. Po trzecie, powinna dawać możliwość uwzględnienia kryteriów wyrażonych w różnych skalach i jednostkach. Ostatnią pożądaną cechą wybranej metody jest generowanie syntetycznej miary dla każdej pary decyzja/scenariusz. Wszystkie wspomniane założenia spełniają z pewnością metody addytywne oraz TOPSIS, a najprostszą z nich jest SAW (*Simple Additive Weighted Method*), która polega na wyznaczeniu dla każdej decyzji średniej ważonej będącej sumą iloczynów wag wszystkich kryteriów i realizacji tychże kryteriów. Dlatego tutaj wykorzystamy to podejście, choć nie jest to jedyne słuszne rozwiązanie.

Poniżej przedstawiono regułę SF+AS dla problemów wielokryterialnych:  $m(\text{SF}+\text{AS})$ :

- 1) Określić współczynnik optyimizmu  $\beta$  oraz wagi dla każdego kryterium  $w^k$  ( $k=1, 2, \dots, p$ ).

$$\sum_{k=1}^p w^k = 1 \quad (1)$$

- 2) W razie konieczności, dokonać normalizacji wyjściowych danych (wzór 2 – kryteria maksymalizowane, wzór 3 – cele minimalizowane), por. [Kukuła, 2012]:

$$a(n)_{ij}^k = \frac{a_{ij}^k - \min_{\substack{i=1,\dots,m \\ j=1,\dots,n}} \{a_{ij}^k\}}{\max_{\substack{i=1,\dots,m \\ j=1,\dots,n}} \{a_{ij}^k\} - \min_{\substack{i=1,\dots,m \\ j=1,\dots,n}} \{a_{ij}^k\}} \quad k=1,\dots,p; i=1,\dots,m; j=1,\dots,n \quad (2)$$

$$a(n)_{ij}^k = \frac{\max_{\substack{i=1,\dots,m \\ j=1,\dots,n}} \{a_{ij}^k\} - a_{ij}^k}{\max_{\substack{i=1,\dots,m \\ j=1,\dots,n}} \{a_{ij}^k\} - \min_{\substack{i=1,\dots,m \\ j=1,\dots,n}} \{a_{ij}^k\}} \quad k=1,\dots,p; i=1,\dots,m; j=1,\dots,n \quad (3)$$

- 3) Obliczyć zagregowaną wartość dla każdej pary decyzja/scenariusz:

$$A(n)_{ij} = \sum_{k=1}^p w^k \cdot a(n)_{ij}^k \quad i=1,\dots,m; j=1,\dots,n \quad (4)$$

- 4) Wyznaczyć sumę „przypadków dominacji” ( $d_i$ ) dla każdego scenariusza:

$$d_i = \sum_{j=1}^n d_{ij} \quad i=1,\dots,m \quad (5)$$

$$d_{ij} = m - \max_i \{p(A(n)_{ij})\} \quad i = 1, \dots, m; j = 1, \dots, n \quad (6)$$

gdzie  $d_i$  stanowi sumę „przypadków dominacji” obliczonych dla scenariusza  $S_i$ .  $n$  to liczba decyzji,  $A(n)_{ij}$  oznacza wartość syntetyczną znormalizowanych wypłat związanych z decyzją  $D_j$  i stanem  $S_i$ .  $d_{ij}$  to liczba zagregowanych wartości dotyczących wariantu  $D_j$ , które są niższe od  $A(n)_{ij}$ . Symbol  $m$  oznacza liczbę scenariuszy, a  $p(A(n)_{ij})$  określa pozycję wartości  $A(n)_{ij}$  w nierosnącym ciągu syntetycznych ocen decyzji  $D_j$  (jeżeli  $A(n)_{ij}$  ma tę samą wartość, co inne zagregowane wypłaty danej strategii, wówczas należy wskazać najdalszą pozycję tejże wartości we wspomnianym ciągu).

5) Przyporządkować każdemu scenariuszowi odpowiedni przedział współczynnika optyimizmu zgodnie z wzorami (7)–(11):

$$w = \frac{1}{d_{\max} - d_{\min} + 1} \quad (7)$$

$$d_{\max} = \max_i \{d_i\} \quad (8)$$

$$d_{\min} = \min_i \{d_i\} \quad (9)$$

$$b_i = \max \left\{ b \mid \left\{ (b \mid w) \wedge \left( b \leq \frac{d_i - d_{\min}}{d_{\max} - d_{\min}} \right) \wedge (b \in [0; 1 - w]) \right\} \right\} \quad i = 1, \dots, m \quad (10)$$

$$t_i = \min \left\{ t \mid \left\{ (t \mid w) \wedge \left( t \geq \frac{d_i - d_{\min}}{d_{\max} - d_{\min}} \right) \wedge (t \in [w; 1]) \wedge (t = b_i + w) \right\} \right\} \quad i = 1, \dots, m \quad (11)$$

gdzie  $w$  jest szerokością przedziału,  $d_{\max}$  i  $d_{\min}$  to odpowiednio największa i najmniejsza liczba „przypadków dominacji”. Skrajne wartości przedziałów oznaczone są symbolami  $b_i$  (początek) oraz  $t_i$  (koniec). Poza przedziałem współczynnika optyimizmu dla scenariusza z najniższą liczbą „przypadków dominacji”, wszystkie przedziały są lewostronnie otwarte.

6) Wyznaczyć wartości, na podstawie których decydent  $h$  podejmie decyzję:

$$V(h) = \{v_1^h, \dots, v_j^h, \dots, v_n^h\} \quad (12)$$

a) Jeżeli  $\beta_h$  (współczynnik optyimizmu decydenta  $h$ ) należy do przedziału przypisanego dokładnie jednemu scenariuszowi, wówczas zbiór  $V(h)$  zawiera wszystkie zagregowane oceny związane z tym stanem:

$$\exists_i (\beta_h \in [b_i, t_i] \vee \beta_h \in ]b_i, t_i]) \Rightarrow V(h) = \{A(n)_{i1}, \dots, A(n)_{ij}, \dots, A(n)_{in}\} \quad (13)$$

- b) Jeżeli  $\beta_h$  należy do przedziału przypisanego przynajmniej dwóm scenariuszom, zbiór  $V(h)$  wyznacza się następująco:

$$\exists_i (\beta_h \in [b_i, t_i] \vee \beta_h \in ]b_i, t_i]) \wedge (|S(S_i^h)| > 1) \Rightarrow V(h) = \{A_{j,h}^{arit}\} \quad (14)$$

$$A_{j,h}^{arit} = \frac{1}{|S(S_i^h)|} \sum_{S_i \in S(S_i^h)} A(n)_{ij} \quad j = 1, \dots, n \quad (15)$$

gdzie  $S(S_i^h)$  stanowi zbiór scenariuszy  $S_i$ , których przedział pokrywa parametr  $\beta_h$ , a  $|S(S_i^h)|$  jest mocą tego zbioru.  $|S(S_i^h)|$  oznacza więc liczbę stanów istotnych dla decydenta  $h$ .

- c) Jeżeli  $\beta_k$  nie należy do żadnego przedziału, szukane wartości ustala się na podstawie wzorów (16)–(21):

$$\neg \exists_i (\beta_h \in [b_i, t_i] \vee \beta_h \in ]b_i, t_i]) \Rightarrow V(h) = \{A_{j,h}^{weig(e,f)}\} \quad (16)$$

$$A_{j,h}^{weig(e,f)} = \frac{\beta_h - t_e}{b_f - t_e} \cdot A(n)_{ff} + \frac{b_f - \beta_h}{b_f - t_e} \cdot A(n)_{ej} \quad j = 1, \dots, n \quad (17)$$

$$S(S_e) = \{S_i \mid ((\beta_h - t_i > 0) \wedge (\beta_h - t_i \rightarrow \min))\} \quad (18)$$

$$S(S_f) = \{S_i \mid ((b_i - \beta_h > 0) \wedge (b_i - \beta_h \rightarrow \min))\} \quad (19)$$

$$(|S(S_e)| > 1) \Rightarrow A(n)_{ej} = \frac{1}{|S(S_e)|} \sum_{S_i \in S(S_e)} A(n)_{ij} \quad (20)$$

$$(|S(S_f)| > 1) \Rightarrow A(n)_{ff} = \frac{1}{|S(S_f)|} \sum_{S_i \in S(S_f)} A(n)_{ij} \quad (21)$$

gdzie parametry  $e$  oraz  $f$  dotyczą scenariuszy, których przydzielone wartości  $\beta$  są nieco niższe (wzór 18) i nieco wyższe (wzór 19) niż  $\beta_k$ . Parametry  $t_e$  i  $b_f$  to odpowiednio koniec przedziału scenariusza  $S_e$  i początek przedziału scenariusza  $S_f$ . Symbol  $A(n)_{ej}$  ( $A(n)_{ff}$ ) oznacza zagregowaną ocenę związaną z decyzją  $D_j$  i stanem  $S_e$  ( $S_f$ ). Wreszcie  $S(S_e)$  i  $S(S_f)$  to zbiory zawierające odpowiednio scenariusze  $S_e$  i  $S_f$ . Jeżeli  $|S(S_e)|$  ( $|S(S_f)|$ ), tj. moc zbioru  $S(S_e)$  ( $S(S_f)$ ), jest większa od jedności (ma to miejsce, gdy więcej niż jeden scenariusz posiada ten sam przedział bliski współczynnikowi  $\beta_k$ ), wówczas wartości  $A(n)_{ej}$  ( $A(n)_{ff}$ ) odpowiada średnia arytmetyczna ocen dotyczących scenariuszy  $S_e$  ( $S_f$ ), zob. wzory (20)–(21).

7) Wybrać optymalną strategię czystą:

a) znaleźć decyzję  $D_{j(1)}^h$ , której wartość w zbiorze  $V(h)$  jest najwyższa:

$$D_{j(1)}^h = \arg \max_j \{v_j^h\} \quad (22)$$

b) jeżeli wariant  $D_{j(1)}^h$  spełnia warunek (23), wariant ten jest optymalną strategią czystą ( $D_{j(1)}^h = D^{h*}_j$ ).

$$\forall_{t \in \{1, 2, \dots, z_h\}} (A(n)_{t,j(1)} \geq w_j^*) \quad (23)$$

$$z_h = \lceil (1 - \beta_h) \cdot m \rceil = \lceil \alpha_h \cdot m \rceil \quad (24)$$

$$A(n)_{1,j(1)} \geq \dots \geq A(n)_{t,j(1)} \geq \dots \geq A(n)_{z_h,j(1)} \quad (25)$$

$$w_j = \min_i \{A(n)_{ij}\} \quad j = 1, \dots, n \quad (26)$$

$$w_j^* = \max_j \{w_j\} \quad (27)$$

gdzie  $z_h$  jest minimalną liczbą scenariuszy, których zagregowane wypłaty powinny być przynajmniej równe  $w_j^*$ ,  $A(n)_{t,j(1)}$  spełnia warunek (25) i dotyczy decyzji  $D_{j(1)}^h$  oraz scenariusza  $S_t$ . Symbol  $w_j^*$  oznacza wskaźnik Walda uzyskany dla optymalnej strategii wskazanej przez regułę Walda (wzory 26-27).

W przypadku wystąpienia więcej niż jednej decyzji spełniającej warunek (22), tylko warianty, dla których spełniona jest zależność (23), są ostatecznie optymalne.

c) jeżeli strategia  $D_{j(1)}^h$  nie spełnia warunku (23), znaleźć decyzję  $D_{j(2)}^h$ , dla której zachowana jest zależność (28). Taka decyzja zawsze istnieje i jest optymalna ( $D_{j(2)}^h = D^{h*}_j$ ).

$$(v_j^h \rightarrow \max) \wedge \left( \forall_{t \in \{1, 2, \dots, z_h\}} (A(n)_{t,j} \geq w_j^*) \right) \quad (28)$$

Jak widać, w ostatnim kroku procedury  $m(\text{SF}+\text{AS})$  zawarte jest pewnego rodzaju zabezpieczenie, które jest kluczowe dla pesymistów i umiarkowanych decydentów. Jeżeli bowiem okaże się, że zagregowane oceny decyzji o najwyższej wartości  $v_j^h$  są w przypadku wielu scenariuszy niższe niż wskaźnik Walda, wówczas należy wybrać wariant, którego wartość  $v_j^h$  jest możliwie jak największa, a odpowiednia liczba zagregowanych ocen jest co najmniej równa wspomnianemu wskaźnikowi. Warunki (23)–(27) gwarantują, że im współczynnik optymizmu jest niższy, tym pewniejszym jest, że decydent nie uzyska mniej niż  $w_j^*$ .

### Przykład

Reguła  $m(\text{SF}+\text{AS})$  zostanie zilustrowana przykładem. Załóżmy, że decydentowi zależy na ustaleniu optymalnej strategii czystej, biorąc pod uwagę dwa kryteria maksymalizowane C1 i C2 i mając do dyspozycji cztery warianty decyzyjne: D1, D2, D3 i D4, przy czym opracował on za pomocą planowania scenariuszowego listę możliwych stanów: S1, S2, S3, S4, S5 oraz tabele z wypłatami dla poszczególnych celów (tabela 3).

Na początek (krok 1) decydent powinien określić swoje preferencje, np.  $\beta_h=0.8$ ,  $w^1=0.7$  i  $w^2=0.3$ .

Ze względu na wyrażenie kryteriów w różnych skalach, konieczne jest wykonanie kroku 2. Znormalizowane wartości podano w tabeli 4.

**Tabela 3.** Macierze wypłat  $a_{ij}^k$  dla kryteriów C1 i C2 – przykład 2

| K  | C1  |     |     |     | C2 |    |    |    |
|----|-----|-----|-----|-----|----|----|----|----|
|    | D1  | D2  | D3  | D4  | D1 | D2 | D3 | D4 |
| S1 | 3.1 | 4.3 | 4.9 | 2.5 | 60 | 26 | 18 | 24 |
| S2 | 1.6 | 1.9 | 3.4 | 2.0 | 35 | 24 | 24 | 14 |
| S3 | 1.2 | 3.2 | 4.0 | 3.4 | 36 | 44 | 13 | 24 |
| S4 | 2.1 | 3.4 | 2.2 | 4.2 | 16 | 10 | 28 | 30 |
| S5 | 1.0 | 1.9 | 4.6 | 3.9 | 25 | 8  | 50 | 36 |

Źródło: Opracowanie własne

**Tabela 4.** Znormalizowane wartości  $a(n)_{ij}^k$  – przykład 2

| K  | C1   |      |      |      | C2   |      |      |      |
|----|------|------|------|------|------|------|------|------|
|    | D1   | D2   | D3   | D4   | D1   | D2   | D3   | D4   |
| S1 | 0.54 | 0.85 | 1.00 | 0.38 | 1.00 | 0.35 | 0.19 | 0.31 |
| S2 | 0.15 | 0.23 | 0.62 | 0.26 | 0.52 | 0.31 | 0.31 | 0.12 |
| S3 | 0.05 | 0.56 | 0.77 | 0.62 | 0.54 | 0.69 | 0.10 | 0.31 |
| S4 | 0.28 | 0.62 | 0.31 | 0.82 | 0.15 | 0.04 | 0.38 | 0.42 |
| S5 | 0.00 | 0.23 | 0.92 | 0.74 | 0.33 | 0.00 | 0.81 | 0.54 |

Źródło: Opracowanie własne.

Zgodnie z modelem A-KS, stosujemy w kroku 3 odpowiednią metodę wielocelową (w tym opracowaniu zdecydowano się na SAW) w celu obliczenia wartości syntetycznych (tabela 5).



**Tabela 5.** Zagregowane wartości znormalizowane  $A(n)_{ij}$  – przykład 2

| S \ D | D1    | D2    | D3    | D4    |
|-------|-------|-------|-------|-------|
| S1    | 0.677 | 0.696 | 0.758 | 0.362 |
| S2    | 0.263 | 0.254 | 0.523 | 0.214 |
| S3    | 0.197 | 0.603 | 0.567 | 0.523 |
| S4    | 0.244 | 0.442 | 0.331 | 0.701 |
| S5    | 0.098 | 0.162 | 0.888 | 0.682 |

Źródło: Opracowanie własne.

W kroku 4 obliczamy „przypadki dominacji” (tabela 6) i ich sumy dla każdego scenariusza (szósta kolumna tabeli).

W kroku 5 ustalamy przedziały dla  $\beta$ , wykonując następujące obliczenia:  $d_{\max} = \max\{12, 5, 8, 8, 7\} = 12$ ,  $d_{\min} = 5$ ,  $w = \frac{1}{12 - 5 + 1} = 0.125$ . Parametry  $b_i$  oraz  $t_i$  podano w ostatniej kolumnie tabeli 6.

**Tabela 6.** „Przypadki dominacji” – przykład 2

| S \ D | D1 | D2 | D3 | D4 | $d_i$ | $[b_i; t_i]$     |
|-------|----|----|----|----|-------|------------------|
| S1    | 4  | 4  | 3  | 1  | 12    | $[0.875; 1.000]$ |
| S2    | 3  | 1  | 1  | 0  | 5     | $[0.000; 0.125]$ |
| S3    | 1  | 3  | 2  | 2  | 8     | $[0.375; 0.500]$ |
| S4    | 2  | 2  | 0  | 4  | 8     | $[0.375; 0.500]$ |
| S5    | 0  | 0  | 4  | 3  | 7     | $[0.250; 0.375]$ |

Źródło: Opracowanie własne.

W kroku 6 wyznaczamy wartości  $v_j^h$ , na podstawie których decydent podejmie ostateczną decyzję. Z tabeli 6 wynika, że nie ma scenariusza, którego przedział zawierałby wartość współczynnika  $\beta_h = 0.8$  rozpatrywanego decydenta. Scenariuszem „sąsiadującym z góry” jest stan S1 (jest to więc stan  $S_f$ ), a scenariuszami „sąsiadującymi z dołu” są stany S3 i S4 (są to więc stany  $S_e$ ). Korzystamy zatem z wzorów (16)–(21):

$$A_{1,h}^{weig(e,f)} = \frac{0.8 - 0.5}{0.875 - 0.5} \cdot 0.677 + \frac{0.875 - 0.8}{0.875 - 0.5} \cdot \left( \frac{0.197 + 0.243}{2} \right) = 0.586$$

$$A_{2,h}^{weig(e,f)} = \frac{0.8 - 0.5}{0.875 - 0.5} \cdot 0.696 + \frac{0.875 - 0.8}{0.875 - 0.5} \cdot \left( \frac{0.603 + 0.442}{2} \right) = 0.661$$

$$A_{3,h}^{weig(e,f)} = \frac{0.8 - 0.5}{0.875 - 0.5} \cdot 0.758 + \frac{0.875 - 0.8}{0.875 - 0.5} \cdot \left( \frac{0.567 + 0.331}{2} \right) = 0.696$$

$$A_{4,h}^{weig(e,f)} = \frac{0.8 - 0.5}{0.875 - 0.5} \cdot 0.362 + \frac{0.875 - 0.8}{0.875 - 0.5} \cdot \left( \frac{0.523 + 0.701}{2} \right) = 0.412$$

W ostatnim kroku znajdujemy decyzję  $D_{j(1)}^h$ :

$$D_{j(1)}^h = \arg \max \{0.5856, 0.6614, 0.6960, 0.4117\} = D3$$

Sprawdźmy, czy decyzja D3 spełnia warunek (23):

$$w_j^* = \max \{0.098, 0.162, 0.331, 0.214\} = 0.331, \quad z_h = \lceil (1 - 0.8) \cdot 5 \rceil = 1$$

Okazuje się, że wariant D3 posiada aż pięć syntetycznych ocen równych co najmniej 0.331 (choć wystarczyłaby jedna taka ocena:  $z_h=1$ ), zatem nie ma podstaw do odrzucenia tejże decyzji. Jest ona ostateczną rekomendowaną strategią:  $D3=D_{j(1)}^h=D_{j^*}^h$ .

## Podsumowanie

W artykule zaproponowano regułę decyzyjną mogącą znaleźć zastosowanie w analizie wielokryterialnej opartej na planowaniu scenariuszowym, której celem jest wyznaczenie optymalnej strategii czystej na podstawie zadeklarowanego przez decydenta współczynnika optymizmu. Zgodnie z podziałem metod wielokryterialnych opracowanym przez Michnika [2012], opisana w pracy procedura  $m(SF+AS)$  nie jest hybrydą, lecz pseudohybrydą, gdyż zawiera elementy reguły decyzyjnej przeznaczonej dla problemów jednocelowych (SF+AS) oraz elementy metody wielokryterialnej polegającej na obliczaniu ważonej sumy realizacji kryteriów cząstkowych (SAW). Reguła  $m(SF+AS)$  zupełnie inaczej, niż ma to miejsce w przypadku innych podejść, traktuje scenariusze. Tym razem status danego stanu jest stabilny, niezależny od analizowanej decyzji, podczas gdy w innych metodach status scenariusza zależy od rozważanego wariantu. Biorąc pod uwagę krytykę istniejących reguł [Minor, 1954; Office i Anderson, 1968], tę unikatową cechę zaprezentowanej reguły należy uznać za zaletę. Oczywiście sam sposób ustalania statusu dla danego scenariusza może być inny niż ten przyjęty w pracy. W przyszłości warto byłoby zastanowić się, jak można wspomóc decydenta w szacowaniu jego współczynnika optymizmu. Procedura w obecnej postaci zakłada, iż parametr ten ustalany jest subiektywnie, intuicyjnie przez samego zainteresowanego (a więc nie matematycznie, lecz psychologicznie). Trudno jest jednak mieć pewność, że decydent dobrze oceni swoje nastawienie do ryzyka.

## Literatura

- Aghdaie M.H., Zolfani S.H., Zavadskas E.K. (2013), *Market segment evaluation and selection based on application of fuzzy AHP and COPRAS-G methods*, „Journal of Business Economics and Management”, 14(1), s. 213-233.
- Bana e Costa C.A., Chakas M.P. (2004), *A carter choice problem: an example of how to use MACBETH to build a quantitative value model based on qualitative value judgements*, „European Journal of Operational Research”, s. 153.
- Basili M., Chateauneuf A., Fontini F. (2008), *Precautionary principle as a rule of choice with optimism on windfall gains and pessimism on catastrophic losses*, „Ecological Economics”, 67, s. 485-491.
- Basili M., Chateauneuf A. (2011), *Extreme events and entropy: A multiple quantile utility model*, „International Journal of Approximate Reasoning”, 52, s. 1095-1102.
- Ben Amor S., Jabeur K., Martel J. (2007), *Multiple criteria aggregation procedure for mixed evaluations*, „European Journal of Operational Research”, 181(3), s. 1506-1515.
- Birge J.R., Louveaux F. (2011), *Uncertainty and modeling issues, Introduction to Stochastic Programming*, Springer Series in Operations Research and Financial Engineering, s. 55-100.
- Brans J.P., Mareschal B., Vincke Ph. (1984), *PROMETHEE: A new family of outranking methods in multicriteria analysis* [w:] J.P. Brans (red.), *Operational research'84*, North-Holland, Amsterdam.
- Chateauneuf A., Cohen M. (2000), *Choquet expected utility model: A new approach to individual behavior under uncertainty and to social welfare* [w:] M. Grabisch, T. Murofushi, M. Sugeno (red.) *Fuzzy measures and integrals: theory and applications*, Physica Verlag, s. 289-313.
- Churchman C.W., Ackoff R.L. (1954), *An approximate measure of value*, „Journal of Operations Research of America”, 2(1), s. 172-187.
- Courtney H., Kirkland J., Viquerie P. (1997), *Strategy under uncertainty*, „Harvard Business Review”, 75(6), s. 66-79.
- De Marco G., Morgan J. (2009), *On multicriteria games with uncountable sets of equilibria*, Centre for Studies in Economics and Finance (CSEF), University of Naples, Italy, CSEF Working Papers 01/2009.
- Dominiak C. (2006), *Multicriteria decision aid under uncertainty*, „Multiple Criteria Decision Making' 05”, s. 63-81.
- Dominiak C. (2009), *Multi-criteria decision aiding procedure under risk and uncertainty*, „Multiple Criteria Decision Making' 08”, s. 61-88.
- Domurat A., Zieliński T. (2013), *Niepewność i niejasność jako uwarunkowania decyzji ekonomicznych*, „Decyzje”, s. 20.
- Durbach I.N. (2014), *Outranking under uncertainty using scenarios*, „European Journal of Operational Research”, 232(1), s. 98-108.

- Durbach I.N., Stewart T.J. (2012), *Modeling uncertainty in multi-criteria decision analysis*, „European Journal of Operational Research”, 223(1), s. 1-14.
- Edwards W., Barron F.H., (1994), *SMARTS and SMARTER: improved simple methods for multiattribute measurement*, „Organizational Behaviour and Human Decision Process”, 60.
- Eiselt H.A., Marianov V. (2014), *Multicriteria decision making under uncertainty: A visual approach*, „International Transactions in Operational Research”, 21(4), s. 525-540.
- Ellsberg D. (2001), *Risk, ambiguity and decision*. Garland Publishing, New York.
- Etner J., Jeleva M., Tallon J.-M. (2012), *Decision theory under ambiguity*, „Journal of Economic Surveys”, 26(2), s. 234-270.
- Fishburn P.C. (1984), *Foundations of risk measurement. I. Risk or probable Loss*. „Management Science”, 30, s. 396-406.
- Gaspars H. (2007), *Alokacja zasobu w warunkach niepewności: modele decyzyjne i procedury obliczeniowe*, „Badania operacyjne i decyzje”, 2007/1, s. 5-27.
- Gaspars-Wieloch H. (2012), *Ograniczona skuteczność metod optymalizacyjnych w rozwiązywaniu ekonomicznych problemów decyzyjnych*, „Ekonomista”, 2012/3, s. 303-324.
- Gaspars-Wieloch H. (2013), *On a decision rule supported by a forecasting stage based on the decision maker's risk aversion* [w:] L. Zadnik Stirn, J. Zerovnik, J. Povh, S. Drobne, A. Lisec (red.), SOR'13 Proceedings, The 12<sup>th</sup> International Symposium on Operational Research in Slovenia, 25-27 September 2013, Dolenjske Toplice, Slovenia, Slovenian Society INFORMATIKA, Section for Operational Research, s. 53-59.
- Gaspars-Wieloch H. (2014a), *Propozycja hybrydy reguł Hurwicza i Bayesa w podejmowaniu decyzji w warunkach niepewności* [w:] T. Trzaskalik (red.), *Modelowanie Preferencji a Ryzyko 2014*. „Studia Ekonomiczne. Zeszyty Naukowe Uniwersytetu Ekonomicznego w Katowicach” 178, Wydawnictwo Uniwersytetu Ekonomicznego w Katowicach, Katowice.
- Gaspars-Wieloch H. (2014b), *On a decision rule for mixed strategy searching under uncertainty on the basis of the coefficient of optimism*, „Procedia – social and behavioral sciences”, 110, s. 923-931.
- Gaspars-Wieloch H. (2014c), *Modifications of the Hurwicz's decision rules*, „Central European Journal of Operations Research”, 22(4), s. 779-774.
- Gaspars-Wieloch H. (2014d), *Modifications of the maximin joy criterion for decision making under uncertainty*, „Quantitative methods in economics”, XV, s. 84-93.
- Gaspars-Wieloch H. (2014e), *The use of a modification of the Hurwicz's decision rule in multicriteria decision making under complete uncertainty*, „Business, management and education”, 12(2), s. 283-302.
- Gaspars-Wieloch H. (2015a), *Modifications of the Omega ratio for decision making under uncertainty*, „Croatian operational research review”, 6(1), s. 181-194.

- Gaspars-Wieloch H. (2015b), *On a decision rule supported by a forecasting stage based on the decision maker's coefficient of optimism*, „Central European Journal of Operations Research”, 23(3), s. 579-594.
- Gaspars-Wieloch H. (2015c), *Innovative products and newsvendor problem under uncertainty without probabilities*, [w:] L. Zadnik Stirn, J. Zerovnik, J. Povh, S. Drobne, A. Lisec (red.), *SOR'15 Proceedings*, The 13<sup>th</sup> International Symposium on Operational Research in Slovenia, 23-25 September 2015, Bled, Slovenia, Slovenian Society INFORMATIKA, Section for Operational Research. (w druku)
- Gaspars-Wieloch H. (2015d), *A decision rule for uncertain multicriteria mixed decision making based on the coefficient of optimism*, „Multiple Criteria Decision Making” 15” (w druku).
- Ghirardato P., Maccheroni F., Marinacci M. (2004), *Differentiating ambiguity and ambiguity attitude*, „Journal of Economic Theory”, 118, s. 133-173.
- Gilboa I. (2009), *Theory of decision under uncertainty*, Cambridge University Press. Cambridge, New York.
- Gilboa I., Schmeidler D. (1989), *Maxmin expected utility with non-unique prior*, „Journal of mathematical economics”, 18, s. 141-153.
- Ginevičius R., Zubrecovas V. (2009), *Selection of the optimal real estate investment project basing on multiple criteria evaluation using stochastic dimensions*, „Journal of business economics and management”, 10(3), s. 261-270.
- Goodwin P., Wright G. (2001), *Enhancing strategy evaluation in scenario planning: A role for decision analysis*, „Journal of management studies”, 38(1), s. 1-16.
- Grigorieva X. (2014), *Multicriteria coalitional model of decision-making over the set of projects with constant payoff matrix in the noncooperative game*, „Applied mathematical sciences”, 8(170), s. 8473-8479.
- Groenewald M.E., Pretorius P.D. (2011), *Comparison of decision making under uncertainty investment strategies with the money market*, „Journal of financial studies and research”.
- Guo P. (2011), *One-shot decision theory*, „IEEE Transactions on systems, man, and cybernetics, Part A”, 41(5), s. 917-926.
- Hayashi T. (2008), *Regret aversion and opportunity dependence*, „Journal of economic theory”, 139(1), s. 242-268.
- Hopfe C.J., Augenbroe G.L.M., Hensen J.L.M. (2013), *Multicriteria decision making under uncertainty in building performance assessment*, „Building and environment”, 69, s. 8190.
- Hurwicz L. (1952), *A criterion for decision making under uncertainty*, Technical Report, s. 355, Cowles Commission.
- Hwang C.L., Yoon K. (1981), *Multiple attribute decision making methods and applications: A state of the art survey*, Springer-Verlag, New York.
- Ioan C., Ioan G. (2011), *A method of choice of the best alternative in the multiple solutions case in the games theory*, „The Journal of accounting and management”, 1(1), s. 5-8.

- Janjic A., Andjelkovic A., Docic M. (2013), *Multiple criteria decision making under uncertainty based on stochastic dominance*, „Proceedings of the 2013 International Conference on Applied Mathematics and Computational Methods in Engineering” 16-19 July 2013, Rhodes Island, Greece, s. 86-91.
- Kaliszewski I., Miroforidis J. (2010), *Multiple criteria decision making: from exact to heuristic optimization*, „Multiple Criteria Decision Making’ 09”, s. 113-120.
- Kaliszewski I., Miroforidis J., Podkopaev D. (2012), *Interactive multiple criteria decision making based on preference driven evolutionary multiobjective optimization with controllable accuracy*, „European Journal of Operational Research”, 216, s. 188-199.
- Karni E. (1985), *Decision making under uncertainty. The case of state-dependent preferences*, Harvard University Press, Cambridge.
- Knight F.H. (1921), *Risk, uncertainty, profit*, Hart. Boston MA, Schaffner & Marx, Houghton Mifflin Co.
- Konarzewska-Gubała E. (1989), *Bipolar: multiple criteria decision aid using Bipolar reference system*, LAMSADE, „Cahiers et Documents”, s. 56.
- Kopańska-Bródka D. (1998), *Wprowadzenie do badań operacyjnych*, Wydawnictwo Akademii Ekonomicznej w Katowicach, Katowice.
- Korhonen A. (2001), *Strategic financial management in a multinational financial conglomerate: A multiple goal stochastic programming approach*, „European Journal of Operational Research”, 128, s. 418-434.
- Kuchta D. (2010), *Generalization of the critical chain method supporting the management of projects with a high degree of uncertainty and imperfect information*, „Operations research and decisions”, 2010/2.
- Kukuła K. (2012). *Propozycja budowy rankingu obiektów z wykorzystaniem cech ilościowych oraz jakościowych*, „Metody ilościowe w badaniach ekonomicznych”, XIII/1, s. 5-16.
- Larichev O.I., Moshkovich H.M. (1995), *ZAPROS-LM – A method and system for ordering multiattribute alternatives*, „European Journal of Operational Research”, s. 82.
- Lee Y.-H. (2012), *A fuzzy analytic network process approach to determining prospective competitive strategy in China: A case study for multinational biotech pharmaceutical enterprises*, „Journal of business economics and management”, 13(1), s. 5-28.
- Liu M., Zhao L. (2009), *Optimization of the emergency materials distribution network with time windows in anti-bioterrorism system*, „International journal of innovative computing, information and control”, 5 (11A), s. 3615-3624.
- Liu Y., Fan Z., Hang Y. (2011), *A method for stochastic multiple criteria decision making based on dominance degrees*, „Information sciences”, 181(19), s. 4139-4153.
- Lootsma F.A. (1993), *Scale sensitivity in the multiplicative AHP and SMART*, „Journal of multi-criteria decision analysis”, 2(2), s. 87-110.

- Lozan V., Ungureanu V. (2013), *Computing the Pareto-Nash equilibrium set in finite multi-objective mixed-strategy games*, „Computer science journal of Moldova”, 21, 2(62), s. 173-203.
- Marinacci M. (2002), *Probabilistic sophistication and multiple priors*, „Econometrica”, 70, s. 755-764.
- Michnik J. (2012), *What kinds of hybrid models are used in multiple criteria decision analysis and why?*, „Multiple criteria decision making '12”, s. 161-168.
- Michnik J. (2013), *Wielokryterialne metody wspomagania decyzji w procesie innowacji*, Wydawnictwo Uniwersytetu Ekonomicznego w Katowicach, Katowice.
- Mikhaidov L., Tsvetinov P. (2004), *Evaluation of services using a fuzzy analytic hierarchy process*, „Applied soft computing journal”, 5(1), s. 23-33.
- Milnor J. (1954), *Games against nature in decision processes*, Wiley, New York, s. 49-60.
- Montibeller G., Gummer H., Tumidei D. (2006), *Combining scenario planning and multi-criteria decision analysis in practice*, „Journal of multi-criteria decision analysis”, 14, s. 5-20.
- Nakamura K. (1986), *Preference Relations on a Set of Fuzzy Utilities as a Basis for Decision Making*, „Fuzzy Sets and Systems”, 20, s. 147-162.
- Nowak M. (2004), *Preference and veto thresholds in multicriteria analysis based on stochastic dominance*, „European Journal of Operational Research”, 158(2), s. 339-350.
- Officer R.R., Anderson J.R. (1968), *Risk, uncertainty and farm management decisions*, „Review of marketing and agricultural economics”, 36(01).
- Ogryczak W. (2006), *Problemy i modele decyzyjne*, Wydawnictwa UW, Warszawa.
- Opricovic S. (1998), *Multicriteria optimization of civil engineering systems*, Technical Report. Faculty of Civil Engineering, Belgrade.
- Piasecki K. (1990), *Decyzje i wiarygodne prognozy*, Akademia Ekonomiczna w Poznaniu, Poznań.
- Pomerol J.C. (2001), *Scenario development and practical decision making under uncertainty*, „Decision support systems”, 31(2), s. 197-204.
- Puppe C., Schlag K. (2009), *Choice under complete uncertainty when outcome spaces are state dependent*, „Theory and Decision”, 66, s. 1-16.
- Ram C., Montibeller G., Morton A. (2010), *Extending the use of scenario planning and MCDA for the evaluation of strategic options*, „Journal of operational research society”, 62(5), s. 817-829.
- Ramík J., Hanclova J., Trzaskalik T., Sitarz S. (2008), *Fuzzy multiobjective methods in multistage decision problems*, „Multiple criteria decision making '07”, s. 186-201.
- Ravindran A.R. (2008), *Operations research and management science handbook*, Boca Raton, London, New York, CRS Press.
- Render B., Stair R.M., Hanna M.E. (2006), *Quantitative analysis for management*, Upper Saddle River, New Jersey, Pearson Prentice Hall.

- Roy B., Bouyssou D. (1993), *Aide multicritere a la decision: methodes et cas*, „Economica”, Paris.
- Savage L. (1961), *The foundations of statistics reconsidered*, „Studies in Subjective Probability”, Wiley, New York, s. 173-188.
- Saaty T.L. (1980), *The analytic hierarchy process*, McGraw Hill, New York.
- Saaty T.L. (1996), *Decision making with dependence and feedback: analytic network process*, RWS Publications, Pittsburgh.
- Schmeidler D. (1986), *Integral representation without additivity*, „Proceedings of the American Mathematical Society”, 97, s. 255-261.
- Sikora W. (red.) (2008), *Badania Operacyjne*, Polskie Wydawnictwo Ekonomiczne, Warszawa.
- Słowiński R., Kadziński M., Greco S. (2014), *Robust ordinal regression for dominance-based approach under uncertainty*, Joint Rough Set Symposium, Granada and Madrid, Spain, July 9-13 2014.
- Stewart T.J. (2005), *Dealing with uncertainties in MCDA: state of the art surveys*, „International series in operations research & management science”, 78, s. 445-466.
- Suo M.Q., Li Y.P., Huang G.H. (2012), *Multicriteria decision making under uncertainty: an advanced ordered weighted averaging operator for planning electric power systems*, „Engineering applications of artificial intelligence”, 25(1), s. 72-81.
- Triantaphyllou E., Lin C. (1996), *Development and evaluation of five fuzzy multiattribute decision-making methods*, „International journal of approximate reasoning”, 14(4), s. 281-310.
- Trzaskalik T. (2008), *Wprowadzenie do badań operacyjnych z komputerem*, Wyd. 2, Polskie Wydawnictwo Ekonomiczne, Warszawa.
- Trzaskalik T. (red.) (2014), *Wielokryterialne wspomaganie decyzji*, Polskie Wydawnictwo Ekonomiczne, Warszawa.
- Trzpiot G. (2006), *Pomiar ryzyka finansowego w warunkach niepewności*, „Badania operacyjne i decyzje”, 2006/2.
- Trzpiot G., Zawisza M. (2000), *Dominacje stochastyczne i probabilistyczne w wielokryterialnej analizie decyzji w zakresie pomocy społecznej* [w:] T. Trzaskalik (red.), *Modelowanie Preferencji a Ryzyko '00*, Wydawnictwo Akademii Ekonomicznej im. Karola Adamieckiego w Katowicach, s. 267-279.
- Tsaur S., Chang T., Yen C. (2002), *The evaluation of airline service quality by fuzzy MCDM*, „Tourism Management”, 23(2), s. 107-115.
- Tyszkla T. (2010), *Decyzje. Perspektywa psychologiczna i ekonomiczna*, Warszawa.
- Tversky A., Kahneman D. (1992), *Advances in prospect theory: cumulative representation of uncertainty*, „Journal of risk and uncertainty”, 5, s. 297-323.
- Urli B., Nadeau R. (2004), *PROMISE/scenarios: an interactive method for multiobjective stochastic linear programming under partial uncertainty*, „European journal of operational research”, 155(2), s. 361-372.



- Van der Heijden K. (1996), *Scenarios: the art of strategic conversation*, John Wiley and Sons, Chichester.
- von Neumann J., Morgenstern O. (1944), *Theory of games and economic behavior*, Princeton University Press, Princeton, New York.
- Voorneveld M., Vermeulen D., Borm P. (1999), *Axiomatizations of Pareto equilibria in multicriteria games*, „Games and economic behavior”, 28, s. 146-154.
- Voorneveld M., Grahn S., Dufwenberg M. (2000), *Ideal equilibria in noncooperative multicriteria games*, „Mathematical methods of operations research”, 52, s. 65-77.
- Wald A. (1950), *Statistical decision functions*, Wiley, New York.
- Walliser B. (2008), *Cognitive economics*, Springer, Berlin-Heidelberg.
- Wang Y., Elhag T. (2006), *Fuzzy TOPSIS method based on alpha level sets with an application to bridge risk assessment*, „Expert systems with applications”, 31(2), s. 309-319.
- Williams C., Smith M., Young P. (1997), *Risk management and insurance*, McGraw-Hill.
- Wojewnik P., Szapiro T. (2010), *Bireference procedure FBI for interactive multicriteria optimization with fuzzy coefficients*, „Central European journal of economic modeling and econometrics”, 2, s. 169-193.
- Xu R. (2000), *Fuzzy least-squares priority method in the analytic hierarchy process*, „Fuzzy sets and systems”, 112(3), s. 395-404.
- Yu C. (2002), *A GP-AHP method for solving group decision-making fuzzy AHP Problems*, „Computers and operations research”, 29(14), s. 1969-2001.

#### ON A DECISION RULE FOR SEARCHING AN OPTIMAL PURE STRATEGY IN UNCERTAIN MULTICRITERIA DECISION MAKING

**Summary:** The author describes a new approach which may be used in uncertain multicriteria decision making with scenario planning to searching an optimal pure strategy. The decision maker does not know the likelihood of particular scenarios. The decision rule is supported by a forecasting stage within which scenarios reflecting the decision maker's attitude towards risk (understood as a possibility that some bad circumstances might happen) are selected. The nature of the decision maker is measured by the coefficient of optimism. Hence, the final strategy is chosen on the basis of a reduced aggregated payoff matrix. The procedure refers to SAW (Simple Additive Weighting Method) and to SF+AS method (Scenario Forecasting + Alternative Selection Method), presented in an other paper and devoted to one-criterion decision problems.

**Keywords:** pure strategy, uncertainty, scenario planning, multicriteria decision making, coefficient of optimism.



Uniwersytet  
Ekonomiczny  
w Katowicach

Studia Ekonomiczne. Zeszyty Naukowe  
Uniwersytetu Ekonomicznego w Katowicach  
ISSN 2083-8611  
Nr 248 · 2015

### **Bartłomiej Gawel**

AGH Akademia Górniczo-Hutnicza  
Wydział Zarządzania  
Katedra Informatyki Stosowanej  
bgawel@zarz.agh.edu.pl

### **Bogdan Rębiasz**

AGH Akademia Górniczo-Hutnicza  
Wydział Zarządzania  
Katedra Informatyki Stosowanej  
brebiasz@zarz.agh.edu.pl

### **Iwona Skalna**

AGH Akademia Górniczo-Hutnicza  
Wydział Zarządzania  
Katedra Informatyki Stosowanej  
iskalna@zarz.agh.edu.pl

## **TEORIA PRAWDOPODOBIENSTWA I TEORIA MOŻLIWOŚCI W PODEJMOWANIU DECYZJI INWESTYCYJNYCH**

**Streszczenie:** Istotnym problemem w analizach ryzyka jest rozróżnienie pomiędzy niepewnością aleatoryczną (probabilistyczną) oraz epistemiczną (wynikającą z braku precyzji lub braku informacji). W artykule opisany został problem podejmowania decyzji inwestycyjnej w oparciu o analizę opłacalności oraz ryzyka inwestycji rzeczowej, w sytuacji gdy część parametrów wejściowych modelu decyzyjnego przedstawiona jest rozkładami prawdopodobieństwa, a część rozkładami możliwości, innymi słowy w sytuacji występowania danych hybrydowych. Analiza ryzyka dla tak zdefiniowanego problemu została wykonana za pomocą metody łączącej symulację Monte Carlo z metodą wykonywania operacji arytmetycznych na zależnych liczbach rozmytych. W artykule do realizacji tych ostatnich wykorzystano metodę programowania nieliniowego. W wyniku tego typu obliczeń uzyskano rozmytą zmienną losową, której interpretacja może być trudna dla praktyków życia gospodarczego. Na podstawie krytycznego przeglądu istniejących mierników ryzyka definiowanych w sytuacji wykorzystania hybrydowych danych, zaproponowano nową metodę podejmowania decyzji inwestycyjnej. W części praktycznej przedstawiono proces podejmowania decyzji inwestycyjnej na przykładzie inwestycji rzeczowej w sektorze hutniczym.

**Słowa kluczowe:** ryzyko inwestycyjne, NPV, metoda Monte Carlo, rozkład możliwości, teoria ewidencji, p-box.

## Wprowadzenie

Założenie, że przyszłość będzie podobna do przeszłości – wpisane w większość prognoz, od najprostszych po najbardziej złożone pod względem ekonometrycznym i technicznym – budzi obecnie więcej wątpliwości niż w minionych dziesięcioleciach, szczególnie w odniesieniu do ekonomii i nauk o zarządzaniu. Odejście od tego założenia umożliwiają prognozy formułowane w oparciu o opinie ekspertów. Jednym z problemów, w których często konieczne jest stosowanie opinii ekspertów i subiektywnych rozkładów prawdopodobieństwa jest rachunek efektywności inwestycji rzeczowych [Wrzosek, 1994].

W literaturze można znaleźć wiele metod oceny opłacalności inwestycji (NPV, IRR, APV, NPVR, PI, DPP itp.) [Pazio, 2001, s. 250-282; Michalak, 2007, s. 90-93; Rogowski, 2013, s. 237-421]. Współczesne wykorzystanie tych metod coraz częściej uwzględnia dostępność i zakres posiadanej przez decydenta informacji. Brak pełnej wiedzy o zjawiskach ma swoje źródło w złożoności i zmienności zjawisk oraz procesów gospodarczych występujących wewnątrz i na zewnątrz przedsiębiorstwa.

Do niedawna do opisu niepewności wykorzystywano teorię prawdopodobieństwa. Jednak założenia leżące u podstaw tej teorii poddawane są coraz szerszej krytyce [Ferson, 1996, s. 990-1007; Kuchta, 2001]. Spowodowało to rozwój alternatywnych metod opisu niepewności takich jak: rachunek przedziałowy (*interval analysis*), probability bound analysis, teoria ewidencji (*evidence theory*), teoria możliwości (*possibility theory*) czy teoria wiarygodności (*credibility theory*). Za pomocą wymienionych metod można w pewnych sytuacjach bardziej adekwatnie opisać wiedzę o zmiennych modelu finansowego służącego do oceny efektywności, takich jak ceny produktów, koszty materiałów, energii, pracy itd.

Analiza symulacyjna pozwala na połączenie i przetworzenie niepewności charakteryzującej zmienne modelu. Zagregowana w ten sposób niepewność jest następnie skwantyfikowana w postaci rozkładu prawdopodobieństwa wskaźnika opłacalności inwestycji. Rozkład ten odzwierciedla ryzyko nieosiągnięcia założonych przez decydenta celów oraz szansę wystąpienia wskaźnika danej wartości.

Na adekwatność rozkładu prawdopodobieństwa wskaźnika opłacalności inwestycji mają wpływ dwa czynniki – opis niepewności zmiennych oraz sposób modelowania zależności pomiędzy nimi [Rogowski, 2013, s. 508]. Często wskazuje się, że główną słabością analizy symulacyjnej jest konieczność wykorzystania w niej subiektywnych rozkładów prawdopodobieństwa oraz trudności w opisie statystycznych zależności, co może prowadzić do błędnej oceny ryzyka przez decydenta. W najnowszych publikacjach naukowych [Rębiasz, 2007, s. 199-210; Rębiasz, 2013, s. 1019-1026] wskazuje się, że wspomniane bariery

analizy symulacyjnej można zredukować, wykorzystując różne metody opisu niepewności w ramach jednego modelu.

W rzeczywistych problemach inwestycyjnych, opis niepewności zmiennych często wynika zarówno z subiektywnych opinii ekspertów, jak i danych historycznych. Można zatem mówić o dwóch źródłach niepewności [Aven, 2010, s. 623-631] – „aleatorycznym” („obiektywnym”), które wynika ze stochastyczności i nie może być zredukowane przez dalsze badania oraz „epistemicznym” („subiektywnym”), które wynika z braku wiedzy i może być zmniejszone poprzez dodatkowe badania. W problemach ekonomicznych i menedżerskich do opisu obu tych niepewności zwykle wykorzystuje się różne interpretacje rachunku prawdopodobieństwa – częstościową i bayesowską.

Niebezpieczeństwo takiego modelowania ryzyka [Helton, Oberkampf, 2004], wynika z faktu, że prawdopodobieństwu nadaje się różne znaczenia na etapie modelowania, by następnie w trakcie analizy symulacyjnej przetwarzać go łącznie, tworząc jedną miarę ryzyka. Decydentowi bez dokładnej analizy założeń trudno w tej sytuacji ocenić, na ile poziom ryzyka wynika ze zmienności otoczenia, w jakim przyszło mu podejmować decyzje, a na ile z braku informacji lub subiektywnych odczuć analityka tworzącego model. Może to w efekcie prowadzić do błędnych decyzji inwestycyjnych.

Wielu badaczy [Dubois, Guyonnet, 2011, s. 145-167], w tym autorzy tego artykułu, uważa, że czysto probabilistyczne podejście jest właściwe, jeżeli niepewność wszystkich parametrów wejściowych ma jednakowy charakter. W przeciwnym wypadku należy dokonać podziału zmiennych w zależności od rodzaju niepewności, a następnie przetwarzać je równolegle przy pomocy symulacji hybrydowej. Celem tego artykułu jest prezentacja sposobów podejmowania decyzji inwestycyjnych w sytuacji wykorzystywania metod hybrydowego przetwarzania niepewności danych.

## **1. Etapy analizy ryzyka w rachunku efektywności inwestycji**

Proces analizy ryzyka w rachunku efektywności składa się z czterech etapów: opisu niepewności zmiennych, przetworzenia niepewności z wykorzystaniem analizy symulacyjnej, prezentacji rezultatów i podjęcia decyzji inwestycyjnej.

### **1.1. Wybór wiarygodnego opisu niepewności zmiennych**

Analiza ryzyka w rachunku efektywności inwestycji rzeczowych rozpoczyna się od budowy modelu finansowego. W modelu tym występują zwykle trzy kategorie zmiennych – rynkowe (np. ceny, popyt), nakłady inwestycyjne oraz

koszty (stałe i zmienne) [Rogowski, 2013, s. 423]. Niepewność zmiennych definiuje się poprzez przestrzeń stanów  $S$  w ten sposób, że na etapie modelowania decydent wie, że jeden ze stanów wystąpi, a pozostałe nie. Decydent w momencie budowy modelu nie wie i nie ma wpływu na to, który stan jest prawdziwy, a który nie. Przestrzeń stanów może być dowolnym zbiorem, aczkolwiek w artykule przyjęto, że przez przestrzeń stanów zawsze będzie oparta o zbiór liczb rzeczywistych. Podzbiorem przestrzeni stanów natury są zdarzenia. Szansa wystąpienia zdarzenia może być określona różnymi miarami.

**Teoria prawdopodobieństwa.** Miarą niepewności wystąpienia zdarzenia  $T \subseteq S$  jest miara *prawdopodobieństwa*, które ma wiele dobrze znanych i zdefiniowanych własności. Istnieją dwie powszechnie uznawane interpretacje prawdopodobieństwa – częstościowa i bayesowska. Ponieważ w dalszych rozważaniach teoria prawdopodobieństwa będzie wykorzystywana do opisu niepewności o charakterze aleatorycznym, to w tym artykule przyjęto interpretację częstościową. *Prawdopodobieństwo* zdarzenia  $T$  oznaczane będzie przez  $P(s \in T)$ . Funkcja gęstości prawdopodobieństwa (PDF) oznaczana będzie przez  $\varphi$ , a dystrybucja rozkładu (CDF) przez  $\Phi$ , przy czym  $\Phi(s) = P((-\infty, s] \cap S)$ .

**Teoria możliwości.** Niech dana będzie pewna funkcja  $\pi$  nazwana *rozkładem możliwości*, która mapuje zbiór  $S$  na przedział  $[0, 1]$ . Funkcja  $\pi$  reprezentuje wiedzę analityka o możliwych stanach zmiennej. Analityk potrafi rozróżnić, który stan jest najbardziej wiarygodny, który jest oczekiwany, a którego wystąpienie będzie zaskoczeniem. Przykładowe wartości funkcji są interpretowane w następujący sposób:

- $\pi(s) = 0$ , stan niemożliwy,
- $\pi(s) = 1$ , stan najbardziej wiarygodny (oczekiwany).

Szansa wystąpienia zdarzenia  $T$  opisywana jest przez parę miar – konieczności  $N$  (*necessity*) oraz możliwości  $\Pi$  (*possibility*), które zdefiniowane są następująco:

$$\Pi(T) = \sup_{s \in T} \pi(s),$$

$$N(T) = \sup_{s \notin T} (1 - \pi(s)).$$

Rozkład możliwości może być utożsamiany z liczbą rozmytą  $\hat{A}$  taką, że  $\mu_{\hat{A}} \equiv \pi$ . Dzięki temu rozkład możliwości może być rozważany w kategoriach  $\alpha$ -przekrojów, ponieważ zgodnie z zasadą dekompozycji liczba rozmyta może być przedstawiona w postaci skończonej sumy  $\alpha$ -przekrojów

$$\hat{A} = \bigcup_{i=0}^I \alpha_i A^{\alpha_i},$$

gdzie  $\alpha$ -przekrój jest zdefiniowany jako

$$A^{\alpha_i} = \{s \mid \pi(s) \geq \alpha_i\}.$$

Główną różnicą pomiędzy teorią prawdopodobieństwa a teorią możliwości z punktu widzenia szacowania ryzyka jest sposób pomiaru niepewności. Często miary konieczności i możliwości zdarzenia interpretuje się jako granice przedziału, w którym znajduje się prawdopodobieństwo tego zdarzenia. Teoria możliwości nadaje się więc lepiej do opisu niepewności epistemicznej, ponieważ pozwala odzwierciedlić niedokładność sądu eksperta [Kuchta, 2001].

W dalszej części artykułu przyjęto, że niepewność o charakterze aleatorycznym będzie opisana teorią prawdopodobieństwa, a niepewność o charakterze epistemicznym teorią możliwości.

## 1.2. Symulacja hybrydowa jako metoda przetwarzania niepewności

W wyniku etapu pierwszego otrzymywany jest ciąg zmiennych, których niepewność opisana jest bądź rozkładem prawdopodobieństwa, bądź rozkładem możliwości. Zmienne te będą nazywane czynnikami ryzyka. Niech dana jest funkcja  $hsym$ , której część zmiennych opisanych jest rozkładami prawdopodobieństwa, a część rozkładami możliwości. Wartością funkcji jest dystrybuenta rozkładu wskaźnika opłacalności inwestycji:

$$\Phi(npv) = hsym(\varphi_1, \dots, \varphi_{n_1}, \pi_1, \dots, \pi_{n_2}), npv \in NPV,$$

gdzie  $NPV$  jest przestrzenią stanów opisujących niepewności wskaźnika efektywności inwestycji.

Aby znaleźć wartość funkcji  $hsym$ , powinno się skorzystać z metod analitycznych [Ferson, Ginzburg, 1996, s. 133-144], symulacji Monte Carlo 2D [Dubois, Guyonnet, 2011] lub symulacji hybrydowej [Baudrit, Guyonnet, Dubois, 2006, s. 593-608]. Wybór sposobu wyznaczania wartości  $hsym$  zależy od specyfiki opisu zmiennych. Charakter rozważanego problemu rachunku efektywności inwestycji wymaga zastosowania metody IRS (*Independent Random Set*), która należy do grupy symulacji hybrydowych. Metoda ta pierwotnie wykorzystywana była do analizy prostych modeli geologicznych. Jej rozszerzenie i przystosowa-

nie do analizy rachunku efektywności (IRS+) zostało zaprezentowane przez Rębiasza [2013, s. 1019-1032].

Z technicznego punktu widzenia metoda IRS łączy w sobie symulację Monte Carlo (próbkiwane zmiennych losowych) oraz metody realizacji operacji arytmetycznych na liczbach rozmytych oparte o zasadę rozszerzenia Zadeha (przetwarzanie niepewności epistemicznej). Algorytm metody IRS+ jest następujący:

**Krok 1** Ustal liczbę kroków symulacji na  $J$  oraz liczbę  $\alpha$ -przekrojów na  $I$ .

**Krok 2** Wygeneruj  $J \cdot n_1$  liczb losowych z rozkładu równomiernego, a następnie wykorzystaj je do generowania wartości zmiennych opisanych rozkładami prawdopodobieństwa. Jeżeli istnieją zależności pomiędzy parametrami, do ich uwzględnienia wykorzystaj macierz Choleskiego. W wyniku powstanie ciąg wektorów  $\{(p_1^j, \dots, p_{n_1}^j)\}_{j=1, \dots, J}$ .

**Krok 3** Dla każdego  $j$ -tego wektora  $(p_1^j, \dots, p_{n_1}^j)$  wykonuj:

**Krok 3.1** Dla każdego  $i$  wykonuj:

**Krok 3.1.1** Dla wszystkich rozkładów możliwości  $\pi_1, \dots, \pi_{n_2}$  wyznacz granice  $i$ -tego  $\alpha$ -przekroju:  $\{(\inf(\pi_k^i), \sup(\pi_k^i))\}_{k=1, \dots, n_2}$

**Krok 3.1.2.** Wyznacz granice przedziału  $[\underline{npv}^{i,j}, \overline{npv}^{i,j}]$ , rozwiązując następujące dwa problemy nieliniowe:

PROBLEM I (sup)

$$\overline{npv}^{i,j} = \max f(x_1, \dots, x_{n_1}, y_1, \dots, y_{n_2})$$

Przy ograniczeniach:

- wartości wektora  $x$  nie mogą przekroczyć granicznych wartości wylosowanych w symulacji

$$x_k \leq p_k^j, k = 1, \dots, n_1$$

- wartości  $y$  nie mogą przekroczyć ograniczeń wynikających z rozkładu możliwości dla wybranego  $\alpha$ -przekroju:

$$\inf(\pi_{k_2}^i) \leq y_k \leq \sup(\pi_{k_2}^i), k_2 = 1, \dots, K$$

- inne ograniczenia opisujące zależności pomiędzy zmiennymi rozmytymi.

PROBLEM II (inf)

$$\underline{npv}^{i,j} = \min f(x'_1, \dots, x'_{n_1}, y_1, \dots, y_{n_2})$$

Przy ograniczeniach:

- wartości wektora  $x'$  nie mogą być mniejsze od wartości otrzymanych w wyniku rozwiązania Problemu I

$$x'_k > x_k, k = 1, \dots, n_1$$

- wartości  $y$  nie mogą przekroczyć ograniczeń rozkładu możliwości dla wybranego  $\alpha$ -przekroju

$$\inf(\pi_{k_2}^i) \leq y_k \leq \sup(\pi_{k_2}^i), k_2 = 1, \dots, K$$

- inne ograniczenia opisujące zależności pomiędzy zmiennymi rozmytymi.

Szczegółowy opis wykorzystania symulacji hybrydowej do wyznaczania efektywności inwestycji można znaleźć w pracy Gawęła, Skalnej i Rębiasza [Rębiasz, Gawęł, Skalna, 2014, s. 125-135]. Wynikiem symulacji hybrydowej IRS+ jest  $J \cdot I$  przedziałów  $[\underline{npv}^{i,j}, \overline{npv}^{i,j}]$ . Do budowy krzywej ryzyka na podstawie uzyskanych przedziałów wykorzystuje się teorię ewidencji.

### 1.3. Prezentacja rezultatów

**Teoria ewidencji.** Niech  $\Theta$  będzie niepustym zbiorem nazywanym ramą rozróżniającą, taką, że opisuje wszystkie możliwe wartości  $NPV$  badanej inwestycji rzeczowej. Wyniki symulacji tworzą zbiór przesłanek

$$F = \{f_{i,j} \subseteq \Theta \mid f_{i,j} = [\underline{npv}^{i,j}, \overline{npv}^{i,j}], i = 1, \dots, I, j = 1, \dots, J\},$$

nazywanych *elementami ogniskowymi*, odnoszących się do rzeczywistej wartości bieżącej netto inwestycji. Ponadto niech będzie dana funkcja  $m$ , która każdemu  $f_{i,j}$  przypisuje jednakową masę prawdopodobieństwa równą  $m(f_{i,j}) = \frac{1}{I \cdot J}$ . Miara

prawdziwości hipotezy o zajściu zdarzenia  $T$  opisywana jest przez funkcję przekonania i funkcję wyobraźności.

Funkcja przekonania  $\text{Bel}(T)$  określa łączną wiarę w poszlaki na rzecz  $T$

$$\text{Bel}(T) = \sum_{T \subseteq f_j} m(f_j),$$

z kolei funkcja wyobraźności określa siłę poszlak przeciwko  $T$

$$\text{Pl}(T) = \sum_{T \cap f_j \neq \emptyset} m(f_j).$$

Para  $[\text{Bel}(T), \text{Pl}(T)]$  tworzy przedział przekonania, który jest często interpretowany jako górne i dolne oszacowanie prawdopodobieństwa  $P(npv \in T)$ .

**Probability box (p-box).** Niech  $\underline{\Phi}, \overline{\Phi} : \mathbb{R} \rightarrow [0, 1]$  będą niemalejącymi funkcjami, takimi że:  $\forall_x \overline{\Phi}(x) \geq \underline{\Phi}(x)$ . Wtedy przedział

$$[\underline{\Phi}, \overline{\Phi}] = \{\tilde{\Phi} : \mathbb{R} \rightarrow [0, 1], \text{niemalejąca} \mid \forall_{x \in \mathbb{R}} \underline{\Phi}(x) \leq \tilde{\Phi}(x) \leq \overline{\Phi}(x)\}$$

określany jest mianem *probability box* (p-box), a funkcje  $\overline{\Phi}$  i  $\underline{\Phi}$  nazywane są górną i dolną dystrybuantą. Postać funkcji  $\tilde{\Phi}$  nie jest znana, wiadomo tylko, że leży pomiędzy  $\overline{\Phi}$  i  $\underline{\Phi}$ . Można wykazać [Baudrit, Guyonnet, Dubois, 2005,



s. 1750-1754], że jeżeli przestrzeń  $NPV$  jest oparta o zbiór liczb rzeczywistych to,  $\bar{\Phi}(x) = Pl((-\infty, x])$ ,  $\underline{\Phi}(x) = Bel((-\infty, x])$ .

Zbiór przesłanek  $F$  można więc przekształcić w p-box  $[Bel((-\infty, npv]), Pl((-\infty, npv))]$ , będący górnym i dolnym ograniczeniem zbioru dystrybuant  $\bar{\Phi}(npv)$ . Aby podjąć decyzję inwestycyjną w oparciu o p-box, konieczne jest przekształcenie go w klasyczną dystrybuantę.

## 2. Podejmowanie decyzji inwestycyjnych w warunkach stochastyczności i niepełnej informacji

### 2.1. Kryterium decyzyjne w ocenie inwestycji rzeczowej

Decyzje inwestycyjne można podzielić na dwie grupy – dotyczące pojedynczej inwestycji oraz dotyczące wyboru portfela inwestycji ze zbioru dostępnych inwestycji. Podjęcie decyzji w pierwszym przypadku można opisać następującymi regułami [Rogowski, 2013, s. 502]:

- jeżeli  $npv > 0$  to inwestycja jest efektywna ekonomicznie i powinna być realizowana,
- jeżeli  $npv \leq 0$  to inwestycja jest nieefektywna ekonomicznie i nie powinna być realizowana,
- jeżeli występują stany natury, dla których  $npv$  jest mniejsze od zera i takie stany, dla których  $npv$  jest większe od zera, to konieczne jest zastosowanie zaawansowanych reguł oceny.

W tej ostatniej sytuacji decyzja o przyjęciu bądź odrzuceniu inwestycji zależy od indywidualnych preferencji inwestora dotyczących ryzyka. Fundamentalnym problemem jest tu zdefiniowanie miary ryzyka inwestycyjnego. Można wyróżnić trzy grupy metod mierzących ryzyko [Jajuga, 2000, s. 112-116]: miary zmienności (rozproszenie miary opłacalności), miary zagrożenia (możliwość wystąpienia niekorzystnych wartości miary opłacalności) i miary wrażliwości (zależności pomiędzy miarami opłacalności a parametrami wejściowymi).

Kryterium decyzyjne dla inwestycji rzeczowej można zapisać w postaci

$$P(npv \in (-\infty, npv_0]) = \theta.$$

Można tu mówić o dwóch miarach zagrożenia:

- **poziom bezpieczeństwa**  $npv_0$  inwestycji dla założonego poziomu  $\theta$ ,
- **prawdopodobieństwo**  $\theta$  nieosiągnięcia założonego poziomu aspiracji  $npv_0$ .

W przeciwieństwie do klasycznej analizy symulacyjnej, w wyniku symulacji hybrydowej otrzymuje się p-box  $[\text{Bel}((-\infty, npv]), \text{Pl}((-\infty, npv))]$ . Obie miary zagrożenia reprezentowane są w tej sytuacji przez przedziały, co utrudnia ich interpretację przez decydenta. Konieczne jest więc przekształcenie p-box w dystrybuantę rozkładu  $npv$ . Do wykonania tego przekształcenia można wykorzystać wiele podejść.

## 2.2. Miary zagrożenia w pomiarze ryzyka inwestycyjnego

Zgodnie z klasycznym podejściem zdefiniowanym przez Knighta [Knight, 1921] można wyróżnić trzy warunki, w jakich decydent podejmuje decyzję inwestycyjną:

- **sytuacja nr 1** (pewność) – zamknięty zbiór alternatyw, konsekwencje zdefiniowane deterministycznie,
- **sytuacja nr 2** (ryzyko) – Inwestor zna krzywą ryzyka,
- **sytuacja nr 3** (niepewność) – Inwestor nie zna tego rozkładu.

Taki podział mimo swojej teoretycznej elegancji stanowi znaczne uproszczenie rzeczywistości. Zwykle w ocenie inwestycji rzeczowych ma się do czynienia z sytuacją pomiędzy niepewnością a ryzykiem, ponieważ bardzo rzadko nie wiadomo nic o prawdopodobieństwie, ale równie rzadko znane jest ono dokładnie. Jak pokazują eksperymenty Ellsberga [Wakker, 2010, s. 277-295], wybory ludzi w sytuacji ryzyka mogą różnić się od wyborów, w których informacje o szansach są nieprecyzyjne. Badania pokazują, że w takich sytuacjach wybory mogą być sprzeczne z teorią użyteczności. Zdaniem Ellsberga należy wprowadzić więc stan pośredni pomiędzy całkowitą ignorancją co do prawdopodobieństwa a pełną wiedzą o rozkładzie. Stan ten nazwany został *niejasnością*. Niejasność ma swoje źródła w niskiej wiarygodności informacji czy też niezgodności informacji.

Matematycznym odzwierciedleniem niejasności jest sytuacja, w której decydent ma do czynienia z ryzykiem opisanym przy pomocy górnej i dolnej dystrybuanty (p-boxa). Decydent dąży do redukcji niejasności, a więc znalezienia takiego przekształcenia, które pozwoli zamienić p-box w krzywą obrazującą ryzyko. Aby osiągnąć swój cel, decydent może przyjąć wiele strategii.

Im szerszy przedział, tym trudniej podjąć decyzję inwestycyjną. Percepcja tego przedziału zależy w dużym stopniu od „awersji do ryzyka” inwestora. W skrajnych przypadkach wyborem konserwatywnego inwestora będzie wartość górnej dystrybuanty, a optymistycznego dolnej. Jednakże w rzeczywistości bardzo niewielu inwestorów ma tak agresywne podejście do ryzyka. Poniżej zaprezentowano kilka strategii budowy krzywej ryzyka w oparciu o parę górna/dolna dystrybuanta.

### 2.2.1. Kryterium Bayesa-Laplace'a

Pierwsze podejście zostało zaproponowane przez Smetsa [Smets, 2005, s. 133-147] pod nazwą *pignistic transformation*. Opiera się ono o kryterium decyzyjne Bayesa-Laplace'a, zgodnie z którym zbiór przesłanek  $F$  jest zbiorem możliwych i nierozróżnialnych z punktu widzenia teorii użyteczności przedziałów wartości  $NPV$ . Zbiory przesłanek można więc potraktować jako zbiory wypłat, do których przypisane jest jednakowe prawdopodobieństwo wystąpienia równe  $m(f_{i,j}) = \frac{1}{I \cdot J}$ . Oczekowaną wartość wypłaty otrzymuje się, transformując przesłankę  $f_{i,j} = [npv^{i,j}, \overline{npv}^{i,j}]$  w rozkład równomierny  $\varphi_{uniform}(npv^{i,j}, \overline{npv}^{i,j})$ . Postać rozkładu  $\Phi(npv)$  wyznacza się z równania [Smets, 2002, s. 17-61]:

$$\Phi_{bet}(npv) = \sum_{npv \in f_{i,j} \subseteq F} \frac{m(f_{i,j})}{|f_{i,j}|}.$$

Warto zwrócić uwagę, że to podejście nie uwzględnia awersji inwestora do ryzyka.

### 2.2.2. Kryterium Hurwitza

Niejasność wyraża niepewność wiedzy o prawdopodobieństwie i może być zdefiniowana jako [Jaffray, Fabrice, 1997, s. 165-185]:

$$\text{Niejasność}(\kappa) = Bel^{-1}(\kappa) - Pl^{-1}(\kappa), \kappa \in [0, 1].$$

Niejasność stanowi stan pośredni pomiędzy całkowitą ignorancją a znajomością prawdopodobieństwa [Domurat, Zieliński, 2013, s. 21-48]. Wykorzystując kryterium Hurwitza, a więc traktując krzywe Bel i Pl jako skrajne scenariusze, Jeffrey definiuje dystrybuantę niejasności jako:

$$\Phi_{amb}(\kappa) = \lambda \cdot Pl^{-1}(\kappa) + (1 - \lambda) \cdot Bel^{-1}(\kappa), \kappa \in [0, 1],$$

gdzie  $\lambda$  przyjmuje wartości z przedziału 0 do 1 i jest nazywany *wskaźnikiem pesymizmu (optymizmu)* decydenta.

### 2.2.3. Dystrybuanta wiarygodności

W trzecim podejściu wykorzystywana jest teoria wiarygodności zaproponowana przez Liu [Liu, 2006, s. 387-408]. Proponuje on przybliżyć  $\Phi(npv)$  dystrybuantą wiarygodności

$$\Phi_{cred}(npv) = \frac{Bel((-\infty, npv]) + Pl((-\infty, npv])}{2}.$$

Dubois [Dubois, 2011, s. 145-167] rozszerza miarę zaproponowaną przez Liu o współczynnik awersji do ryzyka  $\beta$ .

$$\Phi_{cred}(npv) = \beta \cdot Bel((-\infty, npv]) + (1 - \beta) \cdot Pl((-\infty, npv])$$

Niejasność można więc interpretować jako przedział bezpieczeństwa  $[\underline{npv}_0, \overline{npv}_0]$  dla założonego poziomu  $\theta$ , a wiarygodność jako przedział prawdopodobieństwa  $[\underline{\theta}_0, \overline{\theta}_0]$  dla założonego poziomu aspiracji  $npv_0$ .

### 3. Wykorzystanie symulacji hybrydowej w rachunku efektywności inwestycji rzeczowej

Różnice pomiędzy poszczególnymi podejściami zaprezentowano na przykładzie rachunku efektywności projektu inwestycyjnego dotyczącego budowy wydziału powlekania blach ocynkowanych powłokami organicznymi realizowanego w przedsiębiorstwie przemysłu metalurgicznego.

#### 3.1. Opis projektu inwestycyjnego i zmiennych wejściowych

Efektywność projektów inwestycyjnych w hutnictwie zależy w głównej mierze od następujących parametrów: popytu, cen surowców, cen sprzedaży wyrobów, wskaźników materiałochłonności oraz wartości nakładów inwestycyjnych.

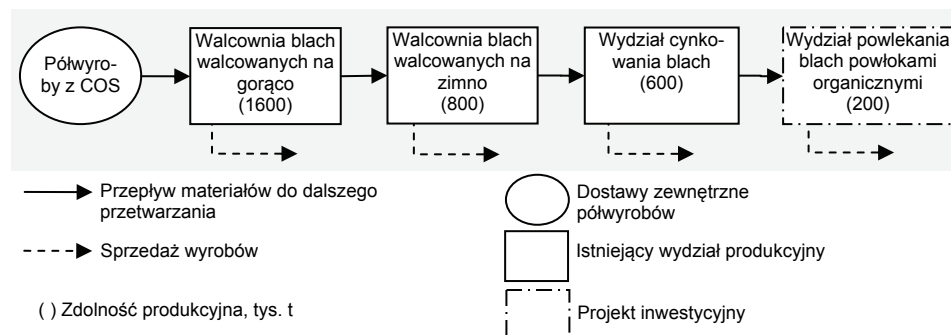
W analizie opłacalności i ryzyka przyjęto, że decydent nie posiada pełnej wiedzy o następujących parametrach:

- jawnym zużyciu produktów,
- sprzedaży poszczególnych produktów oferowanych przez hutę,
- cenach produktów oferowanych przez hutę oraz półproduktów do ich produkcji,
- wskaźnikach materiałochłonności,
- wartości nakładów inwestycyjnych.

Ponadto założono, że pozostałe parametry w rachunku przyjmują wartości zdeterminowane.

Sprzedaż wyrażono w postaci iloczynu prognozowanego jawnego zużycia poszczególnych wyrobów produkowanych przez analizowane przedsiębiorstwo i prognozowanego udziału w rynku.

Schemat procesu produkcyjnego realizowanego przez analizowane przedsiębiorstwo przedstawiono na rys. 1.



**Rys. 1.** Schemat analizowanego procesu produkcyjnego

Źródło: Opracowanie własne.

Tabela 1 przedstawia rozkłady możliwości i parametry funkcji gęstości prawdopodobieństwa (wartość średnia –  $m$ , odchylenie standardowe –  $\sigma$ ) określające prognozy parametrów do obliczania wartości bieżącej netto dla roku  $t = 0$  ekonomicznego cyklu życia projektu.

**Tabela 1.** Trapezowe liczby rozmyte określające ceny wyrobów i półwyrobów wsadowych oraz wskaźniki materiałochłonności, a także parametry funkcji gęstości prawdopodobieństwa charakteryzującej jawne zużycie stalowych wyrobów hutniczych

| Ceny                                                        | Trapezowe liczby rozmyte, USD/t                   |
|-------------------------------------------------------------|---------------------------------------------------|
| Półwyroby z COS                                             | (440,3; 445,0; 450,7; 460,3)                      |
| Blachy walcowane na gorąco                                  | (640,0; 652,8; 683,2,7; 699,2)                    |
| Blachy walcowane na zimno                                   | (786,4; 700,8; 732,8; 750,4)                      |
| Blachy ocynkowane                                           | (772,8; 788,8; 825,6; 844,8)                      |
| Blachy powlekane powłokami organicznymi                     | (1 036,8; 1 057,6; 1 107,2; 1 128,0)              |
| Wskaźniki materiałochłonności                               | Trapezowe liczby rozmyte, t/t                     |
| Półwyroby COS – blachy walcowane na gorąco                  | (1,058; 1,064; 1,075; 1,078)                      |
| Blachy walcowane na gorąco – blachy walcowane na zimno      | (1,105; 1,111; 1,124; 1,130)                      |
| Blachy walcowane na zimno – blachy ocynkowane               | (1,010; 1,020; 1,026; 1,031)                      |
| Blachy ocynkowane – blachy powlekane powłokami organicznymi | (0,998; 0,999; 1,000; 1,001)                      |
| Jawne zużycie                                               | (Średnia, tys. t; odchylenie standardowe, tys. t) |
| Blachy walcowane na gorąco                                  | (2 704,0; 117,5)                                  |
| Blachy walcowane na zimno                                   | (1 162,3; 51,4)                                   |
| Blachy ocynkowane                                           | (1 147,9; 52,4)                                   |
| Blachy powlekane powłokami organicznymi                     | (708,4; 30,8)                                     |

W celu uproszczenia obliczeń założono, że jawne zużycie wyrobów hutniczych w kolejnych latach będzie wzrastać o 1,5% rocznie. Jednocześnie ceny wyrobów i wskaźniki materiałochłonności będą stałe w analizowanym okresie.

Wartość kosztów stałych przyjęto jako wielkość zdeterminowaną na poziomie USD 315 090 tys./rok. Skorygowane koszty przerobu dla analizowanych ustalono również jako wielkości zdeterminowane (tabela 2).

**Tabela 2.** Skorygowane koszty przerobu poszczególnych asortymentów wyrobów produkowanych przez analizowanego producenta

| Wyrób                                         | Blachy walcowane na gorąco | Blachy walcowane na zimno | Blachy ocynkowane | Blachy powlekane powłokami organicznymi |
|-----------------------------------------------|----------------------------|---------------------------|-------------------|-----------------------------------------|
| Skorygowany jednostkowy koszt przerobu, USD/t | 28,4                       | 28,0                      | 116,7             | 175,3                                   |

Udziały w rynku dla poszczególnych wyrobów hutniczych przedstawiono w tabeli 3.

**Tabela 3.** Udziały w rynku analizowanego producenta dla poszczególnych asortymentów wyrobów

| Blachy walcowane na gorąco | Blachy walcowane na zimno | Blachy ocynkowane ogniowo | Blachy powlekane powłokami organicznymi |
|----------------------------|---------------------------|---------------------------|-----------------------------------------|
| 42,5%                      | 40,0%                     | 46,0%                     | 45,0%                                   |

Wartość nakładów inwestycyjnych została opisana jako rozkład możliwości (42 000; 46 000; 50 000) w tys. USD.

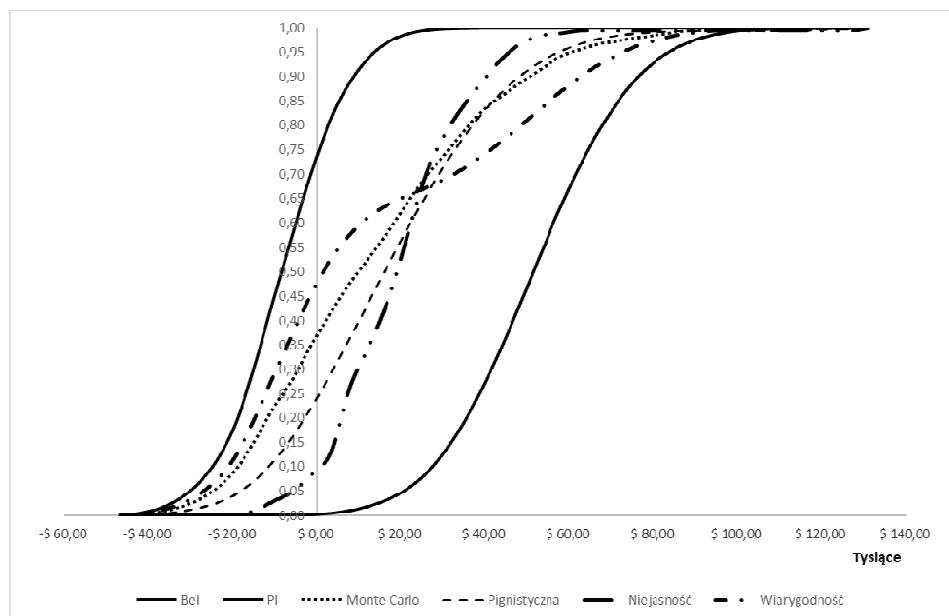
### 3.2. Opis modelu przetwarzania niepewności

Wykorzystując opisane powyżej dane przeprowadzono analizę symulacyjną przy pomocy metody Monte Carlo oraz IRS+. Aby móc wykonać analizę Monte Carlo, wszystkie zmienne opisane rozkładami możliwości zostały przekształcone w rozkłady prawdopodobieństwa, wykorzystując metodę opisaną w [Dubois, Prade, 1993, s. 103-112].

### 3.3. Prezentacja wyników obliczeń

Wyniki obu symulacji oraz krzywe ryzyka przedstawiono na rys. 2. Liniami ciągłymi oznaczono górną i dolną dystrybuantę rozkładu wskaźnika opłacalności inwestycji, a linią kropkowaną symulacji stochastycznej. Na wykresie zaznaczo-

no również krzywe uzyskane za pomocą opisanych w artykule metod przekształcenia p-boxa w  $\Phi(npv)$ , przy czym przyjęto następujące wartości parametrów  $\lambda = \beta = 0,5$ .



Rys. 2. Porównanie wyników symulacji hybrydowej i stochastycznej

W oparciu o wyniki symulacji wyznaczono wartości miar zagrożenia:

- **poziom bezpieczeństwa  $npv_\theta$**  inwestycji dla założonego poziomu  $\theta = 0,9$ ,
- **prawdopodobieństwo  $\theta$**  nieosiągnięcia założonego poziomu aspiracji  $npv_0 \leq 0$ .

Porównanie wartości wskaźników dla poszczególnych podejść przedstawiono w tabeli 4.

Tabela 4. Porównanie kryteriów decyzyjnych

|                       | Poziom bezpieczeństwa $npv_\theta$<br>(w tys. USD) | Prawdopodobieństwo $\theta$ |
|-----------------------|----------------------------------------------------|-----------------------------|
| Symulacja Monte Carlo | \$50 348,90                                        | 0,37                        |
| $\Phi_{bet}$          | \$47 709,49                                        | 0,23                        |
| $\Phi_{amb}$          | \$39 745,52                                        | 0,10                        |
| $\Phi_{cred}$         | \$67 050,55                                        | 0,35                        |
| Symulacje hybrydowe   | [\$9 027,37; \$76 152,22]                          | [0; 0,7]                    |

$P(npv \leq 0)$  uzyskane w wyniku symulacji stochastycznej wynosi 0,37, podczas gdy w oparciu o symulację hybrydową można stwierdzić, że prawdopodobieństwo to znajduje się w szerokim przedziale pomiędzy 0 a 0,7. Odległość pomiędzy górną a dolną granicą przedziału ma swoje źródła w niepewności w opisie zmiennych wejściowych. Wyniki symulacji stochastycznej i epistemicznej można interpretować więc wspólnie w sposób następujący: wartość prawdopodobieństwa  $P(npv \leq 0)$  wynosi 0,37, przy czym błąd subiektywnej oceny eksperckiej oraz stochastyczność powoduje, że rzeczywista wartość prawdopodobieństwa znajdzie się w przedziale  $[0; 0,7]$ . Do decydenta należy ocena istotności tego błędu. Jeżeli uzna on ją za zbyt dużą, to może zlecić dodatkowe pomiary. Pokazuje to przewagę podejścia hybrydowego nad czysto probabilistycznym w sytuacji, gdy mamy do czynienia ze niepewnością parametrów wynikającą z losowości i nieprecyzyjności. W przeciwieństwie do podejścia czysto probabilistycznego decydent otrzymuje przedział, którego szerokość obrazuje niedokładność pomiaru ryzyka wynikającą z oszacowań przyjętych przez analityków.

Z różnych względów (koszty, czas) wykonanie dodatkowych badań nie zawsze jest możliwe. W tym wypadku zamiast korzystać z symulacji stochastycznej, decydent może podjąć decyzję, wykorzystując jedną z przedstawionych powyżej transformacji.

Podejmując decyzję inwestycyjną w oparciu o wskaźniki zagrożenia, oszacowane w oparciu o krzywe powstałe w wyniku transformacji, należy wziąć pod uwagę charakterystykę tejsze. Poszczególne dystrybuanty biorą pod uwagę różne typy inwestorów. W szczególności:

- transformacja w  $\Phi_{bet}$  zakłada, że nie są znane preferencje decydenta,
- transformacja w dystrybuantę niepewności  $\Phi_{amb}$  zakłada, że inwestor podejmuje decyzję w oparciu o wartość oczekiwaną wypłaty; parametr  $\lambda$  służy do przypisywania wagi wartościom brzegowym w obrębie elementów ogniskowych,
- transformacja w  $\Phi_{cred}$  zakłada, że kluczowym kryterium, jakim kieruje się inwestor, jest prawdopodobieństwo wystąpienia danego stanu wskaźnika efektywności. Wskaźnik awersji do ryzyka  $\beta$  przypisuje wagę prawdopodobieństwom brzegowym, dla zadanej wypłaty.

Zdaniem autorów powinno się szacować wartość wskaźnika  $P(npv \leq 0)$  w oparciu o dystrybuantę wiarygodności, a poziom bezpieczeństwa w oparciu o dystrybuantę niepewności. W omawianym przykładzie oznaczałoby to, że  $P(npv \leq 0) = 0,35$ , a  $npv_0 = \$39\,745,5$ .



Takie podejście uwypukla drugą korzyść ze stosowania symulacji hybrydowej, czyli możliwość uwzględnienia w wynikach charakterystyki inwestora.

Wykorzystanie symulacji hybrydowej pozwala również ocenić, na ile dystrybuenta uzyskana w oparciu o symulację Monte Carlo może wpływać na podjęcie decyzji przez inwestora. W sytuacji idealnej krzywe:  $\Phi_{amb}$ ,  $\Phi_{cred}$ ,  $\lambda = \beta = 0,5$  oraz symulacja stochastyczna powinny się pokrywać. Jeśli dystrybuenta Monte Carlo znajduje się pod/nad krzywymi, to znaczy, że wyniki uzyskane przy jej pomocy mogą być obciążone pewnym optymizmem lub pesymizmem. Do wyznaczenia tych krzywych posłużono się pojęciem stochastycznej dominacji.

Funkcja  $F$  wykazuje dominację pierwszego rzędu (FSD) nad  $G$ , gdy  $\forall_x F(x) \leq G(x)$ . Funkcja  $F$  wykazuje dominację drugiego rzędu nad  $G$  (SSD),

$$\text{gdy } \forall_{x \in R} \int_{-\infty}^x (F(t) - G(t))dt \leq 0.$$

Interesujące są następujące sytuacje:

- $\lambda \rightarrow \max, \Phi_{amb}(\kappa) \leq \Phi_{MonteCarlo}(npv)$  (FSD)
- $\beta \rightarrow \max, \Phi_{cred}(npv) \leq \Phi_{MonteCarlo}(npv)$  (SSD)

Rozwiązaniem tych problemów są odpowiednio  $\lambda = 0,38$  oraz  $\beta = 0,35$ . Można więc stwierdzić, że probabilistyczny opis niepewności aleatorycznej i epistemicznej wprowadza do modelu dodatkowe informacje, które powodują, że wyniki symulacji nie pokrywają się z krzywymi neutralnymi:  $\Phi_{amb}$ ,  $\Phi_{cred}$ ,  $\lambda = \beta = 0,5$ . Symulacja Monte Carlo wprowadza więc do modelu informacje, które nie wynikają z charakteru zmiennych, a mogą wpłynąć na decyzje decydenta.

## Podsumowanie

W artykule przedstawiono wyniki badań pilotażowych nad podejmowaniem decyzji inwestycyjnych, gdy do opisu zmiennych wejściowych wykorzystuje się rozkłady możliwości i rozkłady prawdopodobieństwa. W oparciu o dane rzeczywiste zaprezentowano korzyści stosowania symulacji hybrydowej w połączeniu z symulacją stochastyczną. W dalszym etapie badania będą się skupiały na następujących problemach:

- wykorzystanie entropii do budowy wskaźników oceny efektywności inwestycji,
- rozszerzenie opisanych w artykule transformacji o wykorzystanie teorii perspektyw.

## Literatura

- Aven T. (2010), *On how to define, understand and describe risk*, Reliability Engineering & System Safety 95(6).
- Baudrit C., Guyonnet D., Dubois D. (2006), *Joint Propagation and Exploitation of Probabilistic and Possibilistic Information in Risk Assessment*, IEEE Trans. Fuzzy Systems, 14, s. 593-608.
- Baudrit C., Guyonnet D., Dubois D. (2005), *Post-processing the hybrid method for addressing uncertainty in risk assessments*, J. Envir. Eng., ASCE, 131(12).
- Domurat A., Zieliński T. (2013), *Niepewność i niejasność jako uwarunkowania decyzji ekonomicznych*, Decyzje 20, s. 21-48.
- Dubois D., Guyonnet D. (2011), *Risk-informed decision-making in the presence of epistemic uncertainty*, International Journal of General Systems 40(02).
- Dubois D., Prade H. (1993), *On possibility/probability transformations*, [w:] R. Lowen, M. Roubens, *Fuzzy Logic: State of Art*, Kluwer Academic Publ.
- Ferson S. (1996), *What Monte Carlo methods cannot do*, Human and Ecological Risk Assessment 2(4).
- Ferson S., Ginzburg L.R. (1996), *Different methods are needed to propagate ignorance and variability*, Reliability Engineering and System Safety, 54, s. 133-144.
- Helton J.C., Oberkampf L.W. (2004), *Alternative Representations of Epistemic Uncertainty*, Reliability Engineering and Systems Safety 85(1-3), s. 1-10.
- Jaffray J.-Y., Fabrice P. (1997), *On the Existence of Subjective Upper and Lower Probabilities*, Mathematics of Operations Research 22, s. 165-185.
- Jajuga K. (2000), *Miary ryzyka rynkowego – część trzecia. Miary zagrożenia*, „Rynek Terminowy” 8.
- Knight F.H. (1921), *Risk, Uncertainty and Profit*, University of Boston Press, Boston.
- Kuchta D. (2001), *Miękka matematyka w zarządzaniu. Zastosowanie liczb przedziałowych i rozmytych w rachunkowości zarządczej*, Oficyna Wydawnicza Politechniki Wrocławskiej, Wrocław.
- Liu B. (2006), *A survey of credibility theory*, Fuzzy optimization and decision making 5(4), s. 387-408.
- Michalak A. (2007), *Finansowanie inwestycji w teorii i praktyce*, PWN, Warszawa.
- Pazio J.W. (2001), *Analiza finansowa i ocena efektywności projektów inwestycyjnych przedsiębiorstw*, Politechnika Warszawska, Warszawa.
- Rębiasz B. (2007), *Fuzziness and randomness in investment project risk appraisal*, Computers & Operations Research 34(1), s. 199-210.
- Rębiasz B. (2013), *Selection of efficient portfolios-probabilistic and fuzzy approach, comparative study*, Computers & Industrial Engineering 64(4), s. 1019-1032.

- Rębiasz B., Gawel B., Skalna I. (2014), *Hybrid framework for investment project portfolio selection*, Computer Science and Information Systems (FedCSIS), 2014 Federated Conference on. IEEE.
- Rębiasz B., Gawel B., Skalna I. (2014), *Capital budgeting of interdependent projects with fuzziness and randomness*, [w:] Z. Wilimowska (red.), *Information systems architecture and technology*, Oficyna Wydawnicza Politechniki Wrocławskiej, Wrocław.
- Rogowski W. (2013), *Rachunek Efektywności Inwestycji*, PWN, Warszawa.
- Smets P. (2002), *Decision making in a context where uncertainty is represented by belief functions*, [w:] *Belief functions in business decisions*, Physica-Verlag HD, s. 17-61.
- Smets P. (2005), *Decision making in the TBM: the necessity of the pignistic transformation*, Int. J. Approx. Reasoning 38(2), s. 133-147.
- Wakker P. (2010), *Prospect theory: For risk and ambiguity*, Cambridge University Press.
- Wrzosek S. (1994), *Ocena efektywności rzeczowych inwestycji przedsiębiorstwa*, Sygma, Wrocław.

#### PROBABILITY THEORY AND POSSIBILITY THEORY IN INVESTMENT DECISION MAKING

**Summary:** In risk analysis it is very important to distinguish between aleatory (probabilistic) and epistemic (due to lack of precision or information) uncertainty. In this paper is described a problem of making an investment decision on the basis of the analysis of effectiveness and risk of a tangible investment, in a situation when some model parameters are described by probability distributions and some are described by possibility distributions, i.e., in the presence of hybrid data. An analysis of risk for such defined problem was performed using a method which combines Monte-Carlo simulation with the method for performing operations on dependent fuzzy numbers. Those operations were realized using the nonlinear programming. As a result, a random fuzzy variable was obtained, which is difficult to be interpreted for practitioners of economic life. On the basis of critical review of the existing risk measures defined in the case of hybrid data, a method for making an investment decision was proposed. The practical part of the paper presents an investment decision making process on the example of a tangible investment in metallurgical sector.

**Keywords:** investment risk, *NPV*, Monte Carlo method, possibility distribution, evidence theory, p-box.



**Barbara Gładysz**

Politechnika Wrocławska  
Wydział Informatyki i Zarządzania  
barbara.gladysz@pwr.edu.pl

**Kazimierz Frączkowski**

Politechnika Wrocławska  
Wydział Informatyki i Zarządzania  
kazimierz.fraczkowski@pwr.edu.pl

## WIELOWYMIAROWA ANALIZA CZYNNIKÓW SUKCESU PROJEKTÓW IT

**Streszczenie:** Dzięki postępowi technologicznemu, który nastąpił w ostatnich latach, znacznie wzrosła liczba projektów informatycznych. Projekty te często okazywały się skomplikowanymi przedsięwzięciami obciążonymi wysokim ryzykiem. Właściwe zarządzanie projektem może wpłynąć na harmonogram, budżet i jakość projektu, a tym samym przyczynić się do sukcesu projektu. W artykule dokonano wielowymiarowej analizy czynników sukcesu projektu. Badania zostały przeprowadzone na podstawie danych ankietowych.

**Słowa kluczowe:** projekt IT, czynniki sukcesu, analiza składowych głównych.

### Wprowadzenie

Jest wiele poglądów na to, jak mierzyć sukces projektu. Powszechnie zakłada się, że sukces projektu ma wymiary ilościowe: czas, koszt i jakość [Atkinson, 1999]. Sukces projektu nie może jednak być zmierzony jedynie obiektywnymi kryteriami, jest on subiektywną oceną poszczególnych interesariuszy projektu [Bartis i Mitev, 2005]. Obok tych trzech wymiarów istotny jest również sukces projektu w postaci zespołu, menadżera czy organizacji realizującej projekt, jak również w zakresie stosowanych metodyk zarządzania. Niezwykle ważnym jest także wymiar satysfakcji właściciela projektu: czy projekt spełnił jego oczekiwania.

Zarządzanie projektem informatycznym ma wiele cech wspólnych z zarządzaniem dowolnymi innymi przedsięwzięciami w obszarze gospodarki, np. wytwarzającej dobra konsumpcyjne. Ma ono jednak własną specyfikę wynikającą ze swoistości produktu, jakim jest oprogramowanie:

- systemy IT w ramach których wykonuje się oprogramowanie, są często jednorazowe, co utrudnia identyfikację wymagań (często oprogramowanie istotnie zmienia organizację, w której znajduje zastosowanie i odwrotnie),
- przy tworzeniu oprogramowania łatwo popełnia się błędy i brak efektywnych metod ich eliminacji,
- oprogramowanie jako produkt cząstkowy nie daje się „obejrzeć” tak jak tworzona część maszyny, przez co trudno jest śledzić tok jego rozwoju i tym samym wykrywać pojawiające się w kolejnych etapach błędy,
- technologie IT i ich zmiany są bardzo dynamiczne i niestabilne, a inżynieria oprogramowania jest wciąż młoda, stąd znaczna liczba popełnianych błędów.

Dlatego też badanie czynników, które wpływają na sukces projektu IT jest ciągle aktualne, bo zmieniają się one wraz z technologiami, dojrzewaniem metodyk zarządzania projektami oraz metodyk wytwarzania oprogramowania [Frączkowski, 2008].

The Stanish Group przeprowadził badania sukcesu projektu IT w trzech klasycznych wymiarach: czasu, budżetu i zakresu. Według tych badań projekty, które zostały zrealizowane w zaplanowanym terminie, budżecie i zakresie stanowią jedynie 16,2% projektów. Według tych badań sukces projektu IT w głównej mierze zależy od zaangażowania użytkowników (15,9%), wsparcia kadry zarządzającej (13,9%), jasno sprecyzowanych wymagań (13%), właściwego planowania (9,6%), realistycznych oczekiwań (8,2%), mniejszych kamieni milowych, kompetencji zespołu (7,7%), właściciela produktu (*ownership*) (5,3%), jasnej wizji i celów (2,9%), pracowitego, skoncentrowanego zespołu (2,4%) [www 1].

Chow i Cao [2008], Ramos i Mota [2014], Montequin i in. [2014], Stancovic i in. [2013] badali czynniki sukcesu projektów IT na podstawie opinii wykonawców projektu (menadżera lub członków zespołu projektowego). W niniejszej pracy za miarę sukcesu projektu przyjęto stopień satysfakcji klienta. W badaniach przeprowadzono wielowymiarową analizę sukcesu projektu. Zastosowano metodę składowych głównych oraz metody ekonometrii.

## 1. Próba badawcza

Badania w niniejszej pracy oparto na badaniach ankietowych. Raport z nich jest dostępny na stronie internetowej [www 2]. Dobór pytań i formuła pozyskania informacji od wykonawców oraz beneficjentów projektów wynikały z wieloletnich doświadczeń współautora w roli kierownika projektów IT po stronie wykonawcy jak również zamawiającego [Frączkowski, 2003; Frączkowski, 2007;

Frączkowski, 2008]. Przy doborze potencjalnych czynników mogących mieć wpływ na sukces projektu wzięto także pod uwagę czynniki analizowane w pracach [Chow, 2008; Fan, 2010; Raz, 2002]. Podane w artykule wyniki opracowano na podstawie danych o 80 ukończonych projektach IT realizowanych w Polsce.

Sukces projektu był oceniany przez klienta w skali 4-stopniowej: 1 – słaby, 2 – raczej słaby, 3 – raczej wysoki, 4 – wysoki.

Potencjalne czynniki, które brano pod uwagę jako czynniki, które mogą mieć istotny wpływ na sukces projektu widziany oczyma klienta, to:

- podstawowa charakterystyka projektu:
  - sektor gospodarki (prywatny – 69, publiczny – 11),
  - charakter projektu (rozwój nowego systemu – 22, rozwój istniejącego systemu – 23, utrzymanie istniejącego systemu – 2, wdrożenie rozwiązania IT – 29, integracja istniejących systemów – 4);
- wielkość projektu:
  - budżet projektu (planowany: 9,5 tys.-8 mln zł, rzeczywisty: 12 tys.-6,5 mln zł),
  - czas projektu (planowany: 1-60 miesięcy, rzeczywisty: 2-160 miesięcy),
  - liczba osób w zespole (2-80),
  - liczba specjalistów w zespole (0-40) (specjalista – osoba, która ma wystarczające kompetencje do samodzielnego wykonywania zadania),
  - odsetek specjalistów w zespole (7-100%);
- przedsiębiorstwo realizujące projekt:
  - wielkość przedsiębiorstwa realizującego (zdefiniowana na podstawie liczby zatrudnionych pracowników: mikro (1-9), mała (10-49), średnia (50-249), duża (250-1999), wielka (co najmniej 2000),
  - liczba równocześnie prowadzonych projektów w organizacji (1-200);
- zleceniodawca:
  - wielkość organizacji zleceniodawcy (zdefiniowana na podstawie liczby zatrudnionych pracowników: mikro (1-9), mała (10-49), średnia (50-249), duża (250-1999), wielka (co najmniej 2000),
  - liczba osób od strony zleceniodawcy pracujących nad projektem,
  - odsetek osób ze strony zleceniodawcy uczestniczących w projekcie;
- outsourcing (% prac projektowych zleconych na zewnątrz; wyznaczony na podstawie pracochłonności prac);
- metodyka zarządzania projektem (formalna oparta o procedury organizacji, oparta o metodykę formalną, np.: Prince2, PMBok, oparta o metodykę zwinną Agile, nieformalna – wiedza i doświadczenie – wybór jednokrotny);
- stosowanie uzasadnienia biznesowego;

- wpływ ryzyka na projekt (oceniany w skali 1-4; 1 – minimalny wpływ ryzyka na projekt..., 4 – maksymalny wpływ ryzyka na projekt) w następujących obszarach:
  - zespół,
  - środowisko organizacyjne,
  - wymagania,
  - planowanie i kontrola,
  - użytkownik/klient,
  - złożoność projektu;
- zarządzanie ryzykiem:
  - posiadanie procedur zarządzania ryzykiem organizacyjnym,
  - dokumenty (prowadzenie rejestru ryzyka, plan zarządzania ryzykiem – wybór wielokrotny),
  - częstotliwość monitorowania ryzyka (przed rozpoczęciem projektu, przy zmianach w projekcie, w punktach kontrolnych, systematycznie – wybór wielokrotny),
  - udział zespołu w zarządzaniu ryzykiem;
- kierownik projektu:
  - doświadczenie kierownika w zarządzaniu projektami (lata),
  - doświadczenie kierownika w zarządzaniu projektami w branży IT (lata),
  - posiadanie przez kierownika certyfikatu z zarządzania ryzykiem projektu.

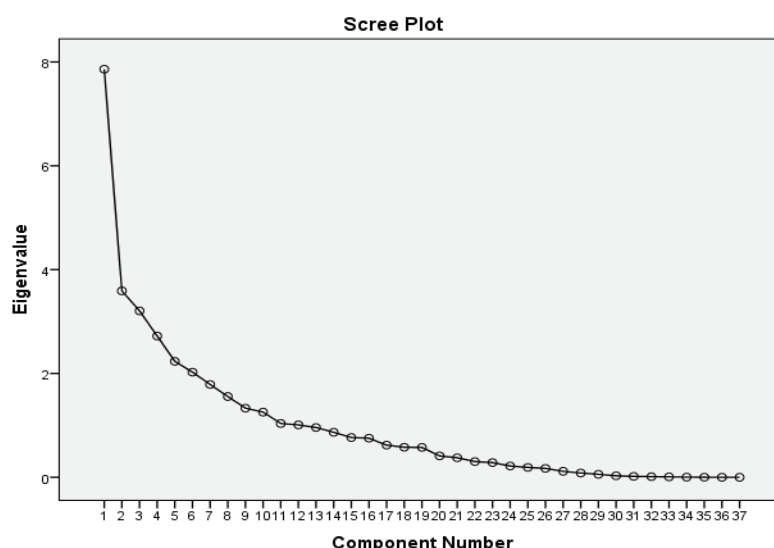
Z analizy danych ankietowych wynika, że wśród ukończonych projektów IT, 23,75% projektów zakończyło się sukcesem w trzech kategoriach: czas, budżet, zakres. Przyjmując za Stanish Group, że jedynie 89,9% projektów IT zostaje ukończonych, oznacza to, że w badanej grupie 16,3% projektów w tych trzech kategoriach zakończyło się sukcesem. Jest to wynik zgodny z tym uzyskanym w badaniach przeprowadzonych przez Stanish Group (16,2%). Jeśli dodatkowo uwzględnimy wymiar satysfakcji klienta, to frakcja projektów zakończonych sukcesem jest jeszcze mniejsza i wynosi 7,5 % w grupie ukończonych projektów oraz 5,2% w grupie wszystkich projektów IT.

## 2. Czynniki sukcesu projektów IT

Do wyłonienia czynników mających istotny wpływ na sukces projektu w ocenie klienta zastosowano analizę składowych głównych. Rezultaty analizy przedstawiono w tabeli 1 oraz na rys. 1. Wyekstraktowano 12 składowych głównych, które wyjaśniają 80% zmienności w charakterystyce projektów IT.

**Tabela 1.** Wariancja wyjaśniona przez poszczególne składowe główne

| Składowa | Suma kwadratów ładunków |             |               |
|----------|-------------------------|-------------|---------------|
|          | Całkowita               | % wariancji | Skumulowany % |
| S1       | 7,861                   | 21,245      | 21,245        |
| S2       | 3,590                   | 9,703       | 30,948        |
| S3       | 3,205                   | 8,662       | 39,610        |
| S4       | 2,721                   | 7,353       | 46,963        |
| S5       | 2,232                   | 6,033       | 52,996        |
| S6       | 2,025                   | 5,473       | 58,468        |
| S7       | 1,788                   | 4,831       | 63,300        |
| S8       | 1,556                   | 4,204       | 67,504        |
| S9       | 1,331                   | 3,598       | 71,102        |
| S10      | 1,255                   | 3,393       | 74,495        |
| S11      | 1,036                   | 2,801       | 77,295        |
| S12      | 1,009                   | 2,726       | 80,021        |

**Rys. 1.** Wykres osypiska

Poszczególnym składowym przypisano określone kategorie jakościowe. W tym celu wyznaczono korelację składowych głównych z analizowanymi czynnikami projektów IT (przedstawionymi w poprzednim punkcie artykułu). W tabeli 2 podano czynniki, które są istotnie skorelowane z poszczególnymi składowymi oraz wartości odpowiednich współczynników korelacji. I tak pierwszą składową S1 (charakteryzującą się największą zmiennością) można interpretować jako wielkość projektu. Druga składowa S2 określa wielkość organizacji klienta i charakter jego współpracy przy realizacji projektu. Składowe S3, S6, S8 mogą być interpretowane jako charakterystyka zespołu projektowego (doświadczenie kierownika projektu czy odsetek specjalistów w zespole projektowym, a także liczba osób



ze strony zleceniodawcy współpracujących przy projekcie). Składowa S4 skorelowana jest z faktem stosowania *Uzasadnienia Biznesowego*, a także z wpływem ryzyka na projekt w obszarze planowania i kontroli. Z ryzykiem w projekcie związane są ponadto składowe S5, S7, S10 oraz S11 (wpływ ryzyka na projekt w obszarach: użytkownik/klient oraz złożoność projektu, a także z faktem przeprowadzania analizy ryzyka przy zmianach w projekcie). Składowa S9 skorelowana jest z faktem stosowania w zarządzaniu projektem metodyki Agile, a składowa S12 z wielkością prac projektowych zleczanych na zewnątrz organizacji (outsourcing).

**Tabela 2.** Czynniki istotnie skorelowane z poszczególnymi składowymi głównymi

| Składowa | Obszar<br>Czynnik                                                                                                | Korelacja     |
|----------|------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|---------------|
| S1       | Wielkość projektu:<br>– czas realizacji<br>– liczba specjalistów w zespole                                       | 0,87<br>0,72  |
| S2       | Zleceniodawca:<br>– wielkość organizacji klienta<br>– współpraca: częstotliwość akceptowania zmian przez klienta | 0,70<br>-0,71 |
| S3       | Doświadczenie kierownika projektu:<br>– w zarządzaniu projektami<br>– w branży projektu                          | 0,85<br>0,88  |
| S4       | Stosowanie Uzasadniania Biznesowego<br>Wpływ ryzyka na projekt w obszarze planowanie i kontrola                  | 0,67<br>-0,69 |
| S5       | Ryzyko:<br>– udział zespołu w zarządzaniu ryzykiem                                                               | 0,85          |
| S6       | Współpraca ze zleceniodawcą:<br>– liczba osób od strony zleceniodawcy pracujących przy projekcie                 | -0,86         |
| S7       | Ryzyko:<br>– wpływ ryzyka na projekt w obszarze złożoność projektu                                               | -0,49         |
| S8       | Zespół:<br>– odsetek specjalistów w zespole                                                                      | 0,82          |
| S9       | Metodyka zarządzania projektem<br>– Agile                                                                        | 0,83          |
| S10      | Ryzyko:<br>– ocena ryzyka przy zmianach w projekcie                                                              | 0,81          |
| S11      | Ryzyko:<br>– wpływ ryzyka na projekt w obszarze użytkownik/klient                                                | 0,75          |
| S12      | Outsourcing                                                                                                      | 0,80          |

W kolejnym kroku skonstruowano model regresji, w którym za objaśnianą zmienną przyjęto stopień satysfakcji klienta (skala 1-4). Jako potencjalne zmienne objaśniające przyjęto składowe główne S1, ..., S12. Model regresji przyjął następujący kształt:

| Zmienna                                                            | Współczynnik | Błąd Std. | t       | Istotność t |
|--------------------------------------------------------------------|--------------|-----------|---------|-------------|
| Stała                                                              | 3.10526      | 0.0599831 | 51.7690 | <0.00001    |
| S1 (Wielkość projektu: czas, liczba specjalistów w zespole)        | -0.175553    | 0.0607882 | -2.8879 | 0.00690     |
| S7 (Ryzyko: wpływ ryzyka na projekt w obszarze złożoność projektu) | -0.144004    | 0.0607883 | -2.3689 | 0.02404     |
| S8 (Zespół: % specjalistów w zespole projektowym)                  | -0.157819    | 0.0607882 | -2.5962 | 0.01412     |
| S9 (Metodyka Agile)                                                | 0.229022     | 0.0607883 | 3.7675  | 0.00067     |
| S12 (Outsourcing)                                                  | -0.108303    | 0.0607883 | -1.7816 | 0.08430     |

Współczynnik determinacji regresji  $R^2 = 0,54$ . Statystyka  $F(5,32) = 7,61$  (poziom istotności  $p = 0,00008$ ). Składowik losowy modelu ma rozkład normalny  $N(0, 0,37)$  – test Shapiro–Wilka  $W = 0,9875$  (istotność  $p = 0,94$ ). Składowik losowy modelu jest homoscedastyczny – test White’a:  $LM = 24,76$  (istotność  $p = 0,29$ ) oraz test Breuscha–Pagana  $LM = 3,92$  (istotność  $p = 0,56$ ).

Zmiennymi istotnymi są składowe S1, S7, S8, S9, S12. Stopień satysfakcji klienta zależy zatem od:

- wielkości projektu (w szczególności: czas projektu i liczba specjalistów w zespole projektowym),
- wpływu ryzyka na projekt w obszarze złożoność projektu,
- struktury zespołu projektowego (odsetek specjalistów),
- faktu stosowania metodyki Agile,
- wielkości prac projektowych zleczanych na zewnątrz organizacji realizującej projekt (outsourcing).

Analizując współczynniki modelu regresji oraz współczynniki korelacji pomiędzy głównymi składowymi i analizowanymi czynnikami sukcesu projektu IT, można wysunąć następujące wnioski. Pozytywnie oceniane przez klienta są projekty o krótkim czasie realizacji oraz te projekty, w realizacji których udział bierze proporcjonalnie mała liczba specjalistów, jak również projekty, w których niewielki odsetek prac wykonywanych jest w ramach outsourcingu. Pozytywnie oceniane są także projekty, w zarządzaniu którymi stosowana jest metodyka Agile oraz te projekty, w których wystąpił znaczący wpływ ryzyka na projekt w obszarze złożoność projektu.

Porównajmy uzyskane w niniejszej pracy wyniki z wynikami badań przeprowadzonymi przez Standish Group. W analizowanej populacji 11% projektów zarządzanych było metodyką Agile. Wszystkie te projekty zostały ocenione jako projekty, które spełniły oczekiwania klienta w stopniu wysokim bądź raczej wysokim. Z metodyką Agile związane jest iteracyjne planowanie, którego podstawą są krótkie okresy, tzw. sprinty. Można zatem uznać, że osiągnięte w tym zakresie pracy wyniki są zgodne z wynikami uzyskanymi w badaniach Standish Group, gdzie jako czynniki sukcesu projektu wskazano „właściwe planowanie” oraz „mniejsze kamienie milowe”. Z przeprowadzonych badań wynika także, że czynnikiem sukcesu w wymiarze właściciela produktu jest niezbyt duża liczba specjalistów w zespole projektowym. Ten czynnik można w pewnym sensie porównać do czynnika „kompetentny i pracowity zespół” wskazanego przez Standish Group. Oznacza to, że ważniejszy jest kompetentny, pracowity i skoncentrowany zespół, a niekoniecznie zespół złożony ze specjalistów. Wpływ liczby specjalistów na stopień satysfakcji klienta wynika m.in. z istotnego wpływu liczby specjalistów zatrudnionych przy realizacji projektu na budżet projektu. Liczba specjalistów w zespole projektowym jest istotnie skorelowana z budżetem projektu ( $r = 0,51$ , istotność  $p \cong 0$ ).

Ponadto z przeprowadzonych badań można wywnioskować, że stosowanie metodyki Agile w zarządzaniu projektem jest istotnie skorelowane z wielkością prac projektowych zleczanych na zewnątrz (współczynnik korelacji  $r = -0,26$ , istotność  $p = 0,024$ ). Oznacza to, że w praktyce projekty zarządzane metodyką Agile realizowane są w znacznym zakresie w systemie własnym. Może to być jedną z przyczyn, z powodu której outsourcing znalazł się w grupie istotnych czynników sukcesu/porażki projektu IT.

Czynnik „wpływ ryzyka w obszarze złożoność projektu” jest istotnie skorelowany z takimi czynnikami jak: przeprowadzenie analizy ryzyka przed rozpoczęciem realizacji oraz prowadzenie rejestru ryzyka (współczynniki korelacji odpowiednio:  $r = 0,29$ , istotność  $p = 0,012$  oraz  $r = 0,22$ , istotność  $p = 0,055$ ). Zatem w ocenie klienta lepiej oceniane są projekty, w zarządzaniu którymi wykorzystuje się techniki zarządzania ryzykiem.

Kolejnym czynnikiem sukcesu projektu IT jest czas jego realizacji. Lepiej oceniane przez klienta są małe projekty o krótkim czasie realizacji.

## Podsumowanie

W pracy do wyłonienia czynników, które mają istotny wpływ na sukces projektu IT widziany oczyma klienta, zastosowano analizę składowych głównych oraz analizę regresji. Z przeprowadzonych badań wynika, że czynnikami,

które mają istotny wpływ na sukces projektu są: wielkość projektu, fakt występowania ryzyka związanego ze złożonością projektu, struktura zespołu projektowego, stosowana metodyka zarządzania projektem oraz odsetek prac projektowych realizowanych w ramach outsourcingu. W skonstruowanym modelu regresji określony został ilościowy wpływ tych czynników na stopień satysfakcji klienta. W pracy porównano również czynniki sukcesu projektu w wymiarze klienta z czynnikami sukcesu projektu IT w trzech podstawowych wymiarach (czas, budżet, zakres) wyłonionymi w badaniach Standish Group. Z porównania tego wynika, że istotnym czynnikiem mającym wpływ na sukces projektu IT w wymiarze klienta, obok czynników sukcesu projektu w trzech podstawowych wymiarach, jest metoda zarządzania projektem IT (rodzaj stosowanej metodyki zarządzania, zarządzanie ryzykiem).

## Literatura

- Atkinson R. (1999), *Project management: cost, time and quality, two best guesses and a phenomenon, it's time to accept other success criteria*, „International Journal of Project Management”, Vol. 6, No. 17, s. 337-342.
- Bartis E., Mitev N. (2008), *A multiple narrative approach to information systems failure: A successful system that failed*, „European Journal of Information Systems”, 17, s. 112-124.
- Chow T., Cao D.B. (2008), *A survey study for critical success factors in agile software projects*, „The Journal of Systems and Software”, 81, s. 961-971.
- Fan D. (2010), *Analysis of critical success factors in IT project management*, [w]: *Proceedings of the 2nd International Conference on Industrial and Information Systems*, s. 487-490.
- Frączkowski K. (2007), *Mapping activities and competence in ICT projects*, [w:] J.A. Kisielnicki, S. Sroka (red.), *Project management essential reality for business and government*, 21st IPMA World Congress Cracow 2007, Akapit, Kraków, s. 61-68.
- Frączkowski K. (2003), *Zarządzanie Projektem Informatycznym*, Oficyna Wydawnicza Politechniki Wrocławskiej.
- Frączkowski K., Karwacka D. (2008), *Examination of factors influencing the success or failure of IT projects*, [w:] C. Orłowski, Z. Kowalczyk, E. Szczerbicki (red.), *Zarządzanie wiedzą i technologiami informatycznymi*, Pomorskie Wydawnictwo Naukowo-Techniczne, Gdańsk, s. 375-382.
- Stankovic D., Nikolic D., Djordjevic M., Cao D.-B. (2013), *A survey study of critical success factors in agile software projects in former Yugoslavia IT companies*, „Journal of Systems and Software”, Vol. 86, Issue 6, s. 1663-1678.

- Montequin V.R., Cousillas S., Ortega F., Villanueva J. (2014), *Analysis of the Success Factors and Failure Causes in Information & Communication Technology (ICT) Projects in Spain*, „Procedia Technology”, Vol. 16, s. 992-999.
- Raz T., Shenhar A.J., Dvir D. (2002), *Risk management, project success and technological uncertainty*, „R&D Management”, Vol. 32, No. 2, s. 101-109.
- Ramos P., Mota C. (2014), *Perceptions of Success and Failure Factors in Information Technology Projects: A Study from Brazilian Companies*, „Procedia – Social and Behavioral Sciences”, Vol. 119, s. 349-357.
- [www 1] Witryna internetowa „The Standish Group Report” <https://www.projectsmart.co.uk/white-papers/chaos-report.pdf> (dostęp: 17.10.2015).
- [www 2] Witryna internetowa „Badanie polskich projektów IT” <http://www.pmresearch.pl> (dostęp: 17.10.2015).

#### MULTIDIMENSIONAL ANALYSIS OF FACTORS OF IT PROJECT SUCCESS

**Summary:** Due to technological advances in recent years, the number of IT projects has significantly increased. Such projects are often complicated and associated with high risk. Appropriate project management has a positive influence on the budget, quality and achieving deadlines, and in this way can lead to the success of a project. This paper presents and multi-criterion analysis of factors involved in the success/failure of a project. This research was carried out on the basis of data from a questionnaire.

**Keywords:** project IT, success factors, principal component analysis.



**Stefan Grzesiak**

Uniwersytet Szczeciński  
Wydział Nauk Ekonomicznych i Zarządzania  
Instytut Ekonometrii i Statystyki  
stegrz49@wneiz.pl

**Robert Józwiak**

Uniwersytet Szczeciński  
Wydział Nauk Ekonomicznych i Zarządzania  
ub@jozwiak-berlin.com

## INTERPOLACJA FUNKCJI TARYFOWEJ W OPTYMALIZACJI PODATKU DOCHODOWEGO OD OSÓB FIZYCZNYCH

**Streszczenie:** W artykule, który dotyczy wyboru sposobu optymalizacji podatku dochodowego od osób fizycznych dla warunków aktualnie istniejących w Polsce, zaprezentowano kilka możliwych podejść, różniących się między sobą sposobem rozwiązania, dokładnością obliczeń i stopniem skomplikowania. Podstawą przeprowadzonego badania było określenie funkcji taryfowej oraz jej interpolacja na podstawie wybranych metod: bazy jednomianowej, bazy Lagrange'a, bazy Newtona, funkcji sklepanych. Przedstawiono również procedurę zastosowania wymienionych metod oraz zalety i wady poszczególnych podejść, ilustrując je wynikami rozwiązań i wykresami. Dla porównania i oceny jakości zaprezentowanych rozwiązań użyto bezwzględnych i względnych odchyleń funkcji interpolacyjnych od polskiej funkcji taryfowej.

**Słowa kluczowe:** funkcja taryfowa, podatek dochodowy, interpolacja wielomianowa, funkcje sklepane.

### Wprowadzenie

Kwestia optymalizacji wielkości podatku dochodowego budzi emocje w wielu krajach, w tym i w Polsce. Sygnałem tego są propozycje różnych rozwiązań m.in. polskiego Ministerstwa Finansów, aby jakiegokolwiek zabiegi i działania w tym kierunku utrudnić, a najlepiej uniemożliwić. Podstawowym problemem dla władz państwowych jest rozstrzygnięcie, które ze stosowanych w praktyce zabiegów są legalne, a które naruszają przepisy prawa. Nie wnikając w tę materię, która budzi zainteresowanie głównie prawników, autorzy zamierzają przedstawić możliwości

interpolacji funkcji taryfowej podatku od osób fizycznych. Przeprowadzenie interpolacji stanowi konieczny warunek umożliwiający zastosowanie procedur optymalizacyjnych opartych na metodach programowania matematycznego w celu określenia możliwie najkorzystniejszych kwot podatku.

Funkcja taryfowa podatku dochodowego od osób fizycznych na zasadach ogólnych według skali podatkowej została zdefiniowana w trzech przedziałach dochodowych. Fakt ten powoduje istnienie punktów nieróżniczkowalnych, co stanowi istotny mankament przy użyciu funkcji taryfowych do zadań optymalizacyjnych. Rozwiązywanie podatkowych problemów optymalizacyjnych za pomocą metod opartych na programowaniu matematycznym<sup>1</sup> wymusza konieczność eliminacji wszystkich punktów nieróżniczkowalnych. Nie chodzi tutaj jedynie o matematyczną poprawność modelu. Różniczkowalność funkcji taryfowej w pełnym przedziale dochodowym jest wymogiem stawianym przez większość programów komputerowych wspomagających rozwiązywanie problemów opartych na programowaniu matematycznym.

Ogólną postać podatkowej funkcji taryfowej składającej się z dwóch przedziałów liniowych oraz kwoty wolnej od podatku może zostać przedstawiona jako:

$$S(x) = \begin{cases} 0 & \text{dla } 0 \leq x < kw \\ a \cdot (x - kw) & \text{dla } kw \leq x < g \\ b \cdot (x - g) + a(g - kw) & \text{dla } x \geq g \end{cases}, \quad (1)$$

gdzie

$x$  – dochód podlegający opodatkowaniu

$a$  – stawka podatkowa w pierwszym przedziale liniowym

$b$  – stawka podatkowa w drugim przedziale liniowym

$kw$  – dochód odpowiadający kwocie wolnej od podatku

$g$  – dochód odpowiadający granicy między oboma przedziałami liniowymi

Wstawiając do formuły (1) wartości:

$$a = 0,18; b = 0,32; kw = 3.089; g = 85.528$$

uzyskujemy aktualną funkcję obciążenia podatkiem dochodowym od osób fizycznych w Polsce [Ustawa o podatku dochodowym, art. 27 ust. 1, 1991]:

$$S_{PL}(x) = \begin{cases} 0 & \text{dla } x < 3.089 \\ 0,18 \cdot x - 556,02 & \text{dla } 3.089 < x \leq 85.528 \\ 0,32 \cdot (x - 85.528) + 14.839,02 & \text{dla } x > 85.528 \end{cases}, \quad (2)$$

<sup>1</sup> Typowy problem stanowi wybór miejsca i formy opodatkowania w układzie transgranicznym, zob. [Grzesiak S. i Józwiak R., 2010].

gdzie

$x$  – dochód podlegający opodatkowaniu

W celu umożliwienia rozwiązywania podatkowych zadań optymalizacyjnych w układzie międzynarodowym, koniecznym jest dla celów porównawczych przedstawienie formuły (1) w walucie obcej, co prowadzi do ogólnej postaci parametrycznej:

$$S(x) = \begin{cases} 0 & \text{dla } 0 \leq x < kw \cdot E \\ a \cdot (x - kw \cdot E) & \text{dla } kw \cdot E \leq x < g \cdot E, \\ b \cdot (x - g \cdot E) + a(g - kw) \cdot E & \text{dla } x \geq g \cdot E \end{cases} \quad (3)$$

gdzie

$x$  – dochód podlegający opodatkowaniu w walucie obcej

$E$  – kurs złotych

Funkcja podatku dochodowego od osób fizycznych wyrażona w EURO<sup>2</sup> przyjmuje postać:

$$S_{PL}(x) = \begin{cases} 0 & 0 \leq x < 738,27 \\ -132,889 + 0,18x & 738,27 \leq x < 20.441,2 \\ 3.546,53 + 0,32(-20.441,2 + x) & x \geq 20.441,2 \end{cases} \quad (4)$$

Nieróżniczkowalność polskiej podatkowej funkcji taryfowej na zasadach ogólnych występuje w punktach stanowiących granice jej poszczególnych przedziałów, bowiem dla odpowiadających im dochodów nie istnieje jednoznacznie określona granica ilorazu różnicowego. Warunkiem różniczkowalności na granicach przedziałów jest równość odpowiednich lewo- i prawostronnych krańcowych stawek podatkowych [Hoffmann, 2008, s. 148]:

$$\lim_{\Delta e \rightarrow 0} \frac{f_l(x_0 + \Delta e) - f_l(x_0)}{\Delta e} = \lim_{\Delta e \rightarrow 0} \frac{f_r(x_0 + \Delta e) - f_r(x_0)}{\Delta e}, \quad (5)$$

gdzie  $f_l(x)$  oraz  $f_r(x)$  określają odpowiednio funkcję poprzedzającą punkt graniczny bądź po nim bezpośrednio następującą. Wyniki obliczeń krańcowych stawek dla punktów  $P_1(738,271;0)$  oraz  $P_2(20441,20;3546,53)$  można przedstawić w następującym zestawieniu:

$$\Rightarrow f_{l1}'(738,271) = 0 \quad \text{oraz} \quad f_{r1}'(738,271) = 0,18, \quad (6)$$

$$\Rightarrow f_{l2}'(20.441,20) = 0,18 \quad \text{oraz} \quad f_{r2}'(20.441,20) = 0,32, \quad (7)$$

Jak wynika z powyższego zestawienia, dla granic poszczególnych przedziałów dochodowych funkcji obciążenia podatkowego w Polsce nie są spełnione równości odpowiadających sobie granic ilorazów różnicowych, co powoduje

<sup>2</sup> W pracy zastosowano kurs: 1 € = 0,248 PLN.



nieróżniczkowalność funkcji w tych punktach. Ten problem można wyeliminować poprzez użycie funkcji możliwie silnie przybliżonej do funkcji obciążenia podatkowego, która spełnia warunek różniczkowalności w pełnym spektrum dochodowym (funkcja interpolacyjna). Tego typu funkcje można wygenerować za pomocą interpolacji wielomianowej. Proces interpolacji można przeprowadzić przy pomocy klasycznych metod interpolacji (na podstawie bazy jednomianowej, bazy Lagrange lub bazy Newtona), jak również przy użyciu interpolacji splajnowej.

Podstawą interpolacji wielomianowej jest stwierdzenie, że dla danych  $n + 1$  punktów parami różnych od siebie istnieje dokładnie jeden wielomian o stopniu nie większym od  $n$ , który interpoluje te punkty. Zadanie sprowadza się więc do znalezienia funkcji  $e(x)$ , która przebiega przez  $n + 1$  określonych węzłów. Rzędne węzłów ( $x_i$  dla  $i = 0, \dots, n$ ) odpowiadają wartościom dochodu do opodatkowania, natomiast odpowiadające im odcięte ( $s_i$ ,  $i = 0, \dots, n$ ) wartościom obciążenia podatkowego.

#### Rozwiązanie na podstawie bazy jednomianowej

Szukana funkcja wielomianowa wyznaczona została przy użyciu bazy jednomianowej z wielomianów postaci  $\{1, x^1, x^2, \dots, x^n\}$ . Dla  $n + 1$  różnych parami węzłów o rzędnych  $x_i$  oraz odciętych  $s_i$  szukany jest wielomian:

$$e(x) = \sum_{i=0}^n a_i \cdot x^i, \quad a_i \in \mathbb{R}, \quad (8)$$

przy czym dla poszukiwanych współczynników  $a_i$  oraz dla wartości odciętych  $S_i$  musi być spełniona następująca równość:

$$S_i = e(x_i) = \sum_{j=0}^n a_j \cdot (x_i)^j, \quad i = 0, \dots, n \quad (9)$$

Zależność ta prowadzi do układu  $n + 1$  równań postaci:

$$\begin{bmatrix} 1 & x_0^1 & \dots & x_0^n \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & x_n^1 & \dots & x_n^n \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} a_0 \\ \vdots \\ a_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} s_0 \\ \vdots \\ s_n \end{bmatrix} \quad (10)$$

Rozwiązaniem powyższego układu równań jest wektor  $\mathbf{a}$ :

$$\mathbf{a} = \mathbf{M}^{-1} \cdot \mathbf{s} \quad (11)$$

Mnożąc wektor  $\mathbf{a}$  przez wektor  $\mathbf{x}^T = (1, x^1, x^2, \dots, x^n)$  uzyskujemy poszukiwaną funkcję wielomianową:

$$e(x) = a_0 + a_1 x^1 + a_2 x^2 + \dots + a_n x^n \quad (12)$$

W celu interpolacji funkcji taryfowej zostały wybrane węzły pokrywające pełny przedział dochodów, istotny z punktu widzenia zadań optymalizacyjnych:

$$\begin{aligned} P(x_0; s_0) &= (500; 0) \\ P(x_1; s_1) &= (15.000; 2.567,11) \\ P(x_2; s_2) &= (25.000; 5.005,31) \\ P(x_3; s_3) &= (80.000; 22.605,30) \\ P(x_4; s_4) &= (200.000; 61.005,30) \end{aligned}$$

Uzyskany w ten sposób układ równań przyjmuje postać:

$$\mathbf{M} \cdot \mathbf{a} = \mathbf{s}, \quad (13)$$

gdzie macierz  $\mathbf{M}$

$$\mathbf{M} = \begin{Bmatrix} 1 & 500 & 250000 & 125000000 & 62500000000 \\ 1 & 15000 & 225000000 & 3375000000000 & 5062500000000000 \\ 1 & 25000 & 625000000 & 15625000000000 & 390625000000000000 \\ 1 & 80000 & 6400000000 & 512000000000000 & 4096000000000000000 \\ 1 & 200000 & 40000000000 & 8000000000000000 & 16000000000000000000 \end{Bmatrix} \quad (14)$$

Rozwiązanie równania stanowi wektor  $\mathbf{a}$ :

$$\mathbf{a} = \mathbf{M}^{-1} \cdot \mathbf{s} \quad (15)$$

Mnożąc wektor  $\mathbf{a}$  przez wektor  $\mathbf{z}$  ( $\mathbf{z}^T = 1, x, x^2, x^3, x^4$ ), otrzymujemy szukaną funkcję interpolacyjną:

$$\begin{aligned} e(x) = & -63,42154259719198 + 0,12497108200904175 \cdot x \\ & + 0,000003757749805864301 \cdot x^2 + 2,75199716994037 \cdot 10^{-11} \cdot x^3 + \\ & 6,620267906340445 \cdot 10^{-17} \cdot x^4 \end{aligned} \quad (16)$$

### Rozwiązanie na podstawie bazy Lagrange'a

Analogicznie określamy szukaną funkcję interpolacyjną dla  $n + 1$  węzłów o współrzędnych  $(x_i, s_i)$ , gdzie  $i = 0, \dots, n$ . Przyjmuje ona postać:

$$e(x) = \sum_{i=0}^n S_i \cdot L_i(x), \quad (17)$$

gdzie

$$L_i^n(x) = \prod_{j=0; j \neq i}^n \frac{x - x_j}{x_i - x_j} \quad (18)$$

Opierając się na tych samych węzłach, które wykorzystane zostały w przypadku baz monomialnych, uzyskujemy za pomocą formuły (18) następujące wielomiany Lagrange'a:

$$\begin{aligned} s_0 \cdot L_0 &= 0 \cdot [(x - 15.000)/(500 - 15.000)] \cdot [(x - 25.000)/(500 - 25.000)] \cdot \\ & [(x - 80.000)/(2.000 - 80.000)] \cdot [(x - 200.000)/(500 - 200.000)] = 0 \\ s_1 \cdot L_1 &= 2.567,11 \cdot [(x - 500)/(15.000 - 500)] \cdot [(x - 25.000)/(15.000 - 25.000)] \cdot \\ & [(x - 80.000)/(15.000 - 80.000)] \cdot [(x - 200.000)/(15.000 - 200.000)] \cdot \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
s_2 \cdot L_2 &= 5.005,31 \cdot [(x-500)/(25.000-500)] \cdot [(x-15.000)/(25.000-15.000)] \cdot \\
&\quad [(x-80.000)/(25.000-80.000)] \cdot [(x-200.000)/(25.000-200.000)] \\
s_3 \cdot L_3 &= 22.602,30 \cdot [(x-500)/(80.000-500)] \cdot [(x-15.000)/(80.000-15.000)] \cdot \\
&\quad [(x-25.000)/(80.000-25.000)] \cdot [(x-200.000)/(80.000-200.000)] \cdot \\
s_4 \cdot L_4 &= 61.005,30 \cdot [(x-500)/(200.000-500)] \cdot [(x-15.000)/(200.000-15.000)] \cdot \\
&\quad [(x-25.000)/(200.000-25.000)] \cdot [(x-80.000)/(200.000-80.000)] \cdot
\end{aligned}$$

Zsumowanie powyższych wielomianów daje szukaną funkcję interpolacyjną zgodnie z oczekiwaniami odpowiadającą funkcji (18):

$$\begin{aligned}
e(x) = s_0 \cdot L_0 + s_1 \cdot L_1 + s_2 \cdot L_2 + s_3 \cdot L_3 + s_4 \cdot L_4 + s_5 \cdot L_5 + s_6 \cdot L_6 = &-63,42154259719198 \\
&+ 0,12497108200904175 \cdot x + 0,000003757749805864301 \cdot x^2 + \\
&2,75199716994037 \cdot 10^{-11} \cdot x^3 + 6,620267906340445 \cdot 10^{-17} \cdot x^4
\end{aligned} \quad (19)$$

### Rozwiązanie na podstawie bazy Newtona

Dla  $n + 1$  węzłów poszukiwana funkcja interpolacyjna ma postać:

$$e(x) = a_0 \cdot w_0(x) + a_1 \cdot w_1(x) + \dots + a_n \cdot w_n(x), \quad (20)$$

gdzie

$$w_i(x) = \begin{cases} 1 & \text{dla } i = 0 \\ (x - x_0)(x - x_1) \dots (x - x_n - 1) & \text{dla } 1 \leq i < n \end{cases} \quad (21)$$

Wartości parametrów  $a_i$  wyznaczano przez przyrównanie wartości funkcji interpolacyjnej do wartości funkcji taryfowej dla wybranych węzłów:

$$e(x_i) = s(x_i) \quad \text{dla } 0 \leq i \leq n \quad (22)$$

Równość powyższa prowadzi do układu równań, który dla wybranych wyżej węzłów przyjmuje postać:

$$\mathbf{M} \cdot \mathbf{a} = \mathbf{s} \quad (23)$$

Macierz  $\mathbf{M}$  składa się z następujących wierszy:

$$\begin{array}{ccccccc}
1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
1 & 8 \cdot 10^3 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
1 & 48 \cdot 10^3 & 192 \cdot 10^7 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
1 & 98 \cdot 10^3 & 882 \cdot 10^7 & 4.410 \cdot 10^{11} & 0 & 0 & 0 \\
1 & 148 \cdot 10^3 & 2.072 \cdot 10^7 & 20.720 \cdot 10^{11} & 103.600 \cdot 10^{15} & 0 & 0 \\
1 & 218 \cdot 10^3 & 4.578 \cdot 10^7 & 77.826 \cdot 10^{11} & 933.912 \cdot 10^{15} & 6.537.384 \cdot 10^{19} & 0 \\
1 & 278 \cdot 10^3 & 7.506 \cdot 10^7 & 172.638 \cdot 10^{11} & 3.107.484 \cdot 10^{15} & 40.397.292 \cdot 10^{19} & 242.383.752 \cdot 10^{11}
\end{array} \quad (24)$$

Po prawej stronie równania macierzowego (23) znajduje się wektor  $\mathbf{s}$ , którego współrzędne odpowiadają wartościom funkcji obciążenia podatkowego dla poszczególnych węzłów:

$$\mathbf{S}^T = (0 \quad 333,15 \quad 13.732,10 \quad 36.217 \quad 58.722 \quad 90.229 \quad 118.161) \quad (25)$$

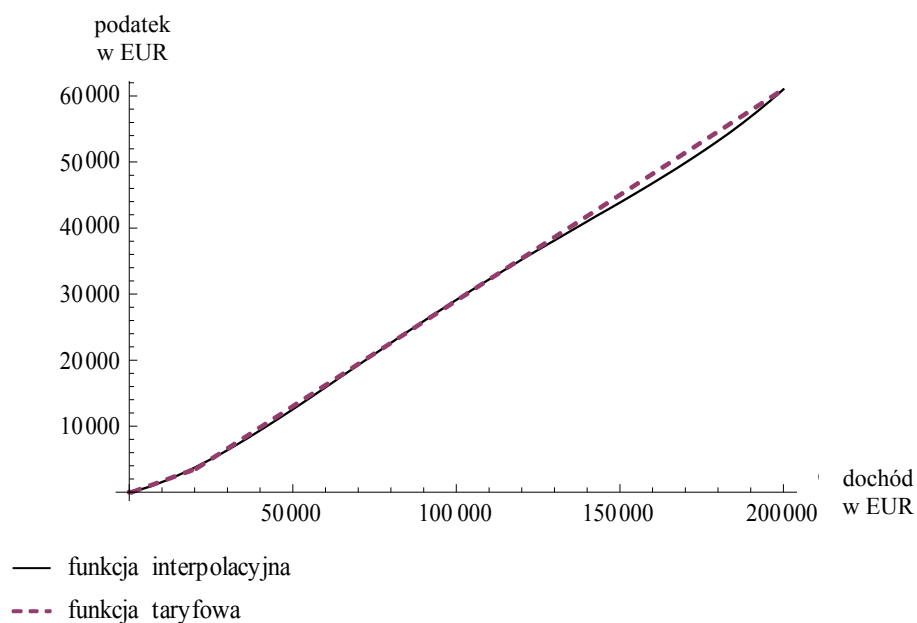
Rozwiązaniem układu równań (23) jest wektor  $\mathbf{a} = \mathbf{M}^{-1} \cdot \mathbf{s}$ , który przemnożony przez ośmioelementowy wektor  $\mathbf{w}$ , w postaci:

$$\mathbf{w}^T = ((1), (x-2000), ((x-2000)(x-10000)), ((x-2000)(x-10000)(x-50000)), ((x-2000)(x-10000)(x-50000)(x-100000)), ((x-2000)(x-10000)(x-50000)(x-100000)(x-150000)), ((x-2000)(x-10000)(x-50000)(x-100000)(x-150000)(x-220000)), ((x-2000)(x-10000)(x-50000)(x-100000)(x-150000)(x-220000)(x-80000))), \quad (26)$$

daje nam szukaną funkcję interpolacyjną  $e(x)$ :

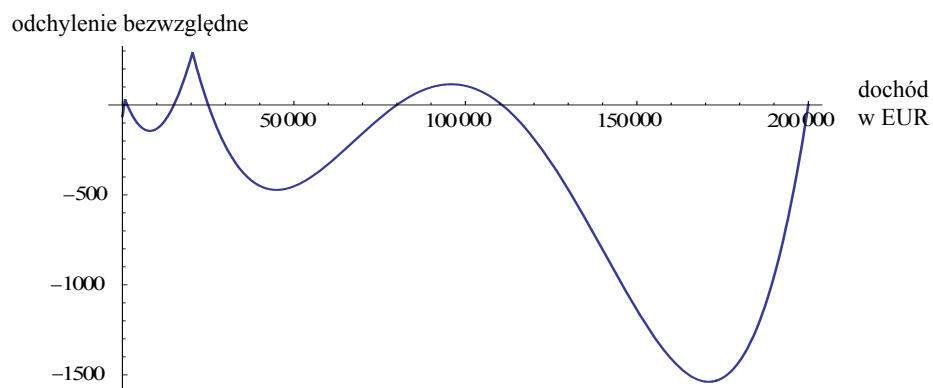
$$e(x) = (\mathbf{M}^{-1} \cdot \mathbf{a}) \cdot \mathbf{w} = 141,959 - 0,0963265x + 0,00001297356x^2 - 1,51859 \cdot 10^{-10}x^3 + 9,23513 \cdot 10^{-16}x^4 - 2,77637 \cdot 10^{-21}x^5 + 3,24409 \cdot 10^{-27}x^6 \quad (27)$$

Przy pomocy trzech przedstawionych wyżej metod uzyskano identyczną funkcję interpolacyjną  $e(x)$ . Każda z wykorzystanych metod posiada pewne zalety. Metoda generująca funkcję interpolacyjną na bazie Newtona umożliwia proste dołączanie dodatkowych węzłów bez potrzeby ponownego przeliczania całego systemu. Stanowi to istotną zaletę pozwalającą na elastyczne stosowanie funkcji interpolacyjnej w zależności od określonego jej zastosowania. Metoda oparta na bazie jednomianowej charakteryzuje się z kolei dużą przejrzystością. Dla dużej liczby parametrów jest ona jednak mało efektywna. Zaletą interpolacji przy użyciu bazy Lagrange'a jest łatwość jej implementacji, chcąc jednak rozszerzyć funkcję o dodatkowy węzeł, konieczne jest powtórzenie całego procesu obliczeniowego.



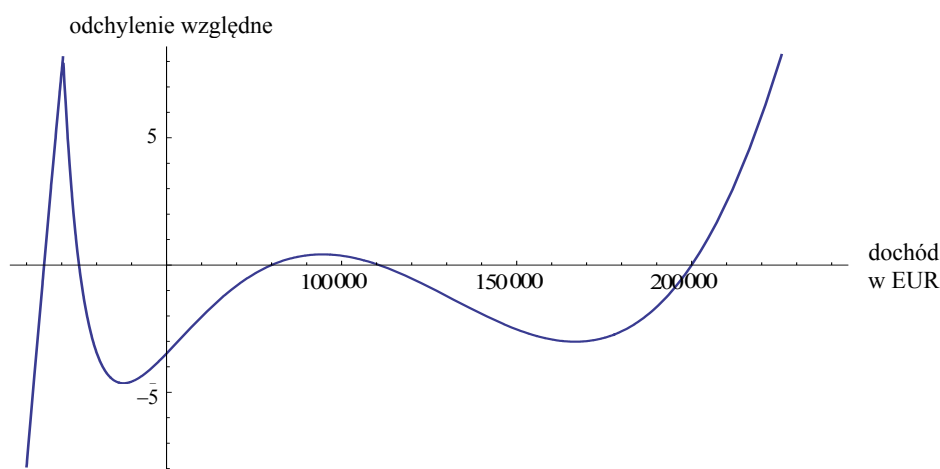
**Rys. 1.** Porównanie funkcji taryfowej według skali z funkcją interpolacyjną opartą na bazie jednomianowej

Źródło: Obliczenia własne.



**Rys. 2.** Odchylenie bezwzględne funkcji interpolacyjnej opartej na bazie jednomianowej od funkcji taryfowej

Źródło: Obliczenia własne.



**Rys. 3.** Odchylenie względne funkcji interpolacyjnej opartej na bazie jednomianowej od polskiej funkcji taryfowej

Źródło: Obliczenia własne.

Porównanie funkcji  $e(x)$  potwierdza stosunkowo dokładne odwzorowanie wyjściowej funkcji taryfowej przez wyprowadzoną funkcję interpolacyjną.

Jakość danej funkcji interpolacyjnej określana jest przez krzywe bezwzględne-go oraz względnego jej odchylenia od funkcji pierwotnej.

Z przedstawionych wyżej rysunków wynika, iż wyznaczona funkcja interpolacyjna względnie dobrze przybliża funkcję taryfową w obszarze między pierwszym a ostatnim węzłem. Maksymalne odchylenie bezwzględne dla dochodów mniejszych od 200 000 (ostatni węzeł interpolacyjny) wynosi ok. 1500, co odpowiada mniej więcej czteroprocentowemu odchyleniu względnemu.

Poza obszarem dochodowym ograniczonym pierwszym i ostatnim węzłem odchylenia od pierwotnej funkcji taryfowej są tak duże, że jakiegokolwiek zastosowanie funkcji interpolacyjnej dla dochodów leżących powyżej ostatniego węzła nie jest możliwe.

Sytuację zmienić może zagęszczenie węzłów. Wprowadzenie dodatkowego węzła zdecydowanie polepsza jakość interpolacji w obszarach dochodowych, które leżą w jego otoczeniu, powodując równocześnie silne wzmocnienie odchyleń w przedziałach odpowiadającym bardzo wysokim dochodom.

### Interpolacja funkcjami sklejanymi

W celu uniknięcia efektu silnych odchyleń leżących za granicą ostatniego i przed granicą pierwszego węzła, istnieje możliwość zastosowania interpolacji

splajnami (funkcjami sklejanymi). Polega ona na wprowadzeniu funkcji wielomianowych łączących dwa wierzchołki „obejmujące” dane miejsce nieróżniczkowalne.

Jak już wykazano, funkcja obciążenia podatkowego w Polsce jest nieróżniczkowalna jedynie w punktach stanowiących granice poszczególnych przedziałów dochodowych. W związku z tym można się ograniczyć tylko do punktów odpowiadających granicom przedziałów:

$$P_1(x_1; s_1) = (738,271; 0)$$

$$P_2(x_2; s_2) = (20441,20; 3546,53)$$

Zadanie polega na znalezieniu dla każdego węzła  $x_i$  odpowiedniej funkcji wielomianowej

$$e_i(x, x_d, x_g), \text{ gdzie } x_d < x_i < x_g, \quad (28)$$

która w punktach  $x_d$  oraz  $x_g$  „wtapia się” w funkcję taryfową w ten sposób, że funkcja całkowita jest w tych punktach ciągła i dwukrotnie różniczkowalna.

Punkty  $x_d$  oraz  $x_g$  muszą zostać tak dobrane, aby odchylenie funkcji wielomianowej  $e_i(x, x_{di}, x_{gi})$  od funkcji taryfowej  $s(x)$  dla danego węzła  $P_i(x_i, s_i)$  było minimalne. Warunek ten można formalnie przedstawić jako:

$$\min_{x_{di}, x_{gi}} \left[ \left( \int_{x_{di}}^{x_{gi}} [S_{PL}(x) - e_i(x, x_{di}, x_{gi})] dx \right)^2 \right]. \quad (29)$$

Warunek (29) opiera się na minimalizacji powierzchni zawartej pomiędzy funkcją faktycznego obciążenia podatkowego  $S_{PL}(x)$  oraz szukaną funkcją splinową  $e_i$ . Ze względu na przedziałową definiowalność funkcji obciążenia podatkowego  $S_{DE}(x)$  korzystniejsza z punktu widzenia zastosowania oprogramowania obliczeniowego<sup>3</sup> jest następująca forma zadania minimalizującego [Schanz, 2006]:

$$\min_{x_{di}, x_{gi}} \left[ \left( \int_{x_{di}}^{x_i} s_{i-}(x) dx + \int_{x_i}^{x_{gi}} s_{i+}(x) dx - \int_{x_{di}}^{x_{gi}} e_i(x) dx \right)^2 \right] \quad (30)$$

Funkcje  $s_{i-}(x)$  oraz  $s_{i+}(x)$  odpowiadają elementowi funkcji obciążenia bezpośrednio poprzedzającemu węzeł  $P_i(x_i, s_i)$  oraz elementowi po nim następującemu. Zadanie minimalizacyjne (30) musi zostać wykonane dla wszystkich nieróżniczkowalnych węzłów  $P_i(x_i, s_i)$ .

Aby spełnione były warunki ciągłości oraz dwukrotnej różniczkowalności, szukana funkcja wielomianowa  $e_i(x)$  musi być funkcją przynajmniej stopnia piątego [Davies, 2001].

<sup>3</sup> W pracy obliczenia wykonano przy pomocy oprogramowania Mathematica 9.0.

Współczynniki tej funkcji określa następujący układ równań:

- funkcja musi przebiegać przez punkty  $x_d$  oraz  $x_g$

$$\begin{aligned} S_{DE}(x_d) &= a_0 + a_1 \cdot x_d + a_2 \cdot x_d^2 + a_3 \cdot x_d^3 + a_4 \cdot x_d^4 + a_5 \cdot x_d^5 \\ S_{DE}(x_g) &= a_0 + a_1 \cdot x_g + a_2 \cdot x_g^2 + a_3 \cdot x_g^3 + a_4 \cdot x_g^4 + a_5 \cdot x_g^5 \end{aligned} \quad (31)$$

- funkcja musi być w punktach  $x_d$  oraz  $x_g$  różniczkowalna

$$\begin{aligned} S_{DE}'(x_d) &= a_1 + 2a_2 \cdot x_d + 3a_3 \cdot x_d^2 + 4a_4 \cdot x_d^3 + 5a_5 \cdot x_d^4 \\ S_{DE}'(x_g) &= a_1 + 2a_2 \cdot x_g + 3a_3 \cdot x_g^2 + 4a_4 \cdot x_g^3 + 5a_5 \cdot x_g^4 \end{aligned} \quad (32)$$

- funkcja musi być dwukrotnie różniczkowalna w punktach  $x_d$  oraz  $x_g$

$$\begin{aligned} S_{DE}''(x_d) &= 2a_2 + 6a_3 \cdot x_d + 12a_4 \cdot x_d^2 + 20a_5 \cdot x_d^3 \\ S_{DE}''(x_g) &= 2a_2 + 6a_3 \cdot x_g + 12a_4 \cdot x_g^2 + 20a_5 \cdot x_g^3 \end{aligned} \quad (33)$$

Zapis macierzowy powyższego układu równań ma postać:

$$\mathbf{M} \cdot \mathbf{a}_i = \mathbf{s}_i, \quad (34)$$

gdzie macierz  $\mathbf{M}$

$$\mathbf{M} = \begin{bmatrix} 1 & x_d & x_d^2 & x_d^3 & x_d^4 & x_d^5 \\ 1 & x_g & x_g^2 & x_g^3 & x_g^4 & x_g^5 \\ 0 & 1 & 2x_d & 3x_d^2 & 4x_d^3 & 5x_d^4 \\ 0 & 1 & 2x_g & 3x_g^2 & 4x_g^3 & 5x_g^4 \\ 0 & 0 & 2 & 6x_d & 12x_d^2 & 20x_d^3 \\ 0 & 0 & 2 & 6x_g & 12x_g^2 & 20x_g^3 \end{bmatrix} \quad (35)$$

Należy zatem dla danego nieróżniczkowalnego punktu  $P_i$  wyznaczyć wektor  $\mathbf{a}_i$

$$\mathbf{a}_i = \mathbf{M}^{-1} \cdot \mathbf{s}_i \quad (36)$$

a następnie w celu wyznaczenia funkcji  $e_i(x, x_{di}, x_{gi})$  przemnożyć wektor  $\mathbf{a}_i$  przez wektor  $\mathbf{x}$ , gdzie

$$\mathbf{x}^T = (1 \ x \ x^2 \ x^3 \ x^4 \ x^5) \quad (37)$$

Dla punktu  $P_1$  współrzędnym wektora  $\mathbf{s}$  odpowiadają wartości funkcji taryfowej oraz wartości jej pochodnych pierwszego i drugiego stopnia w punktach  $x_d$  oraz  $x_g$ :

$$\begin{aligned} s(x_{d1}) &= 0, s(x_{g1}) = 0,18x - 556,02, s'(x_{d1}) = 0, s'(x_{g1}) = 0,18, \\ s''(x_{d1}) &= 0, s''(x_{g1}) = 0 \end{aligned}$$

Rozwiązując równanie macierzowe:

$$\mathbf{a}_1 = \mathbf{M}^{-1} \cdot \mathbf{s}_1, \quad (38)$$



wyznaczamy wektor  $\mathbf{a}_1$ , który pomnożony przez wektor  $\mathbf{x}^T = (1 \ x \ x^2 \ x^3 \ x^4 \ x^5)$  daje nam funkcję  $e_1(x, x_{d1}, x_{g1})$ :

$$e_1(x, x_{d1}, x_{g1}) = \mathbf{x}^T \cdot \mathbf{a}_1 \quad (39)$$

Wartości  $x_{d1}$  oraz  $x_{g1}$  możemy wyznaczyć, rozwiązując zadanie minimalizacji:

$$\min_{x_{d1}, x_{g1}} [(\int_{x_{d1}}^{738,27} s_{1-}(x) dx + \int_{738,27}^{x_{g1}} s_{1+}(x) dx - \int_{x_{d1}}^{x_{g1}} e_1(x) dx)^2] \quad (40),$$

gdzie  $s_{1-}(x) = 0$ ,  $s_{1+}(x) = 0,18 \cdot x - 132,89$ .

Obliczenia dla zadania (40) charakteryzują się jednak dużą niedokładnością, na którą wpływają przybliżenia dokonywane przez program obliczeniowy. Uzyskane w ten sposób wyniki są niezadowalające. W zastosowaniach odnoszących się do zagadnień optymalizacji opodatkowania wystarczający jest intuicyjny wybór wartości  $x_{d1}$  oraz  $x_{g1}$  tak, aby obejmowały one dany nieróżniczkowalny punkt. Prowadzi to do istotnego zmniejszenia nakładu obliczeniowego przy nieznacznym ubytku dokładności związanej z brakiem uzyskania optymalnego przebiegu funkcji sklejanej. Dla nieróżniczkowalnego punktu  $P(x_1, s_1) = (8.004; 0)$  zostały zatem intuicyjnie przyjęte następujące wartości:

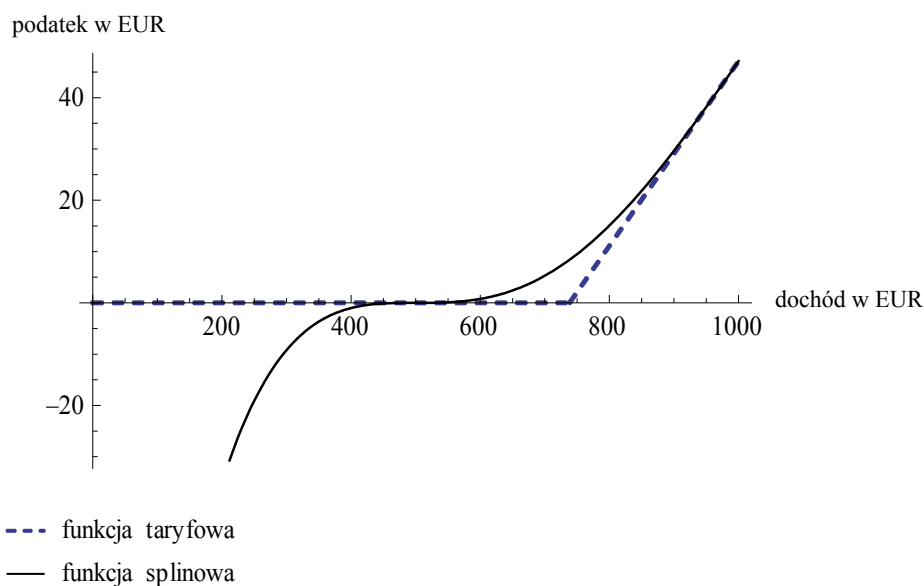
$$X_{d1} = 500, \quad X_{g1} = 1000$$

Wstawiając powyższe wartości do równania funkcji  $e_1(x, x_{d1}, x_{g1})$ , uzyskano szukaną funkcję sklejaną  $e_1(x)$ :

$$e_1(x) = -200,441 + 1,40664 \cdot x - 0,00367992 \cdot x^2 + 0,00000435544 \cdot x^3 - 2,23992 \cdot x^4 + 4,05312 \cdot x^5$$

Dla punktu  $P_2 = (20.441, 20; 3.546, 53)$  wektor  $\mathbf{s}_2$  przyjmuje postać:

$$\begin{aligned} s(x_{d2}) &= 0,18x - 132,889, \quad s(x_{g2}) = 0,32(x - 20441,20) + 3546,53 \\ s'(x_{d2}) &= 0,18, \quad s'(x_{g2}) = 0,32, \quad s''(x_{d2}) = 0, \quad s''(x_{g2}) = 0 \end{aligned} \quad (41)$$



**Rys. 4.** Splajen funkcji taryfowej dla nieróżniczkowalnego punktu  $x = 738,27$

Źródło: Obliczenia własne.

Rozwiązaniem układu równań jest:

$$\mathbf{a}_2 = \mathbf{M}^{-1} \cdot \mathbf{s}_2 \quad (42)$$

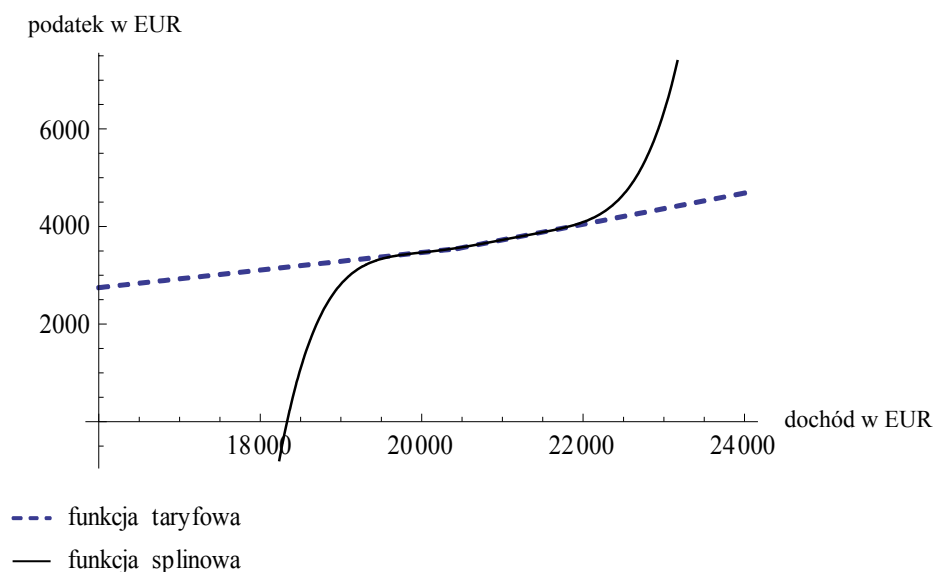
W celu wyznaczenia funkcji  $e_i(x, x_d, x_g)$  mnożymy wektor  $\mathbf{a}$  przez wektor  $\mathbf{x}$ , gdzie

$$\mathbf{x}^T = (1 \ x \ x^2 \ x^3 \ x^4 \ x^5)$$

Dla  $x_{d2} = 20.000$  oraz  $x_{g2} = 21.000$  uzyskujemy funkcję interpolacyjną:

$$e_2(x) = -1,908549338890075 \cdot 10^8 + 45.987,8 \cdot x - 4,430601 \cdot x^2 + 0,00021334435 \cdot x^3 - 5,134525 \cdot 10^{-9} \cdot x^4 + 4,941 \cdot 10^{-14} \cdot x^5$$

Uwzględniając obie funkcje sklejane, otrzymujemy funkcję interpolacyjną stanowiącą zmodyfikowaną funkcję taryfową:

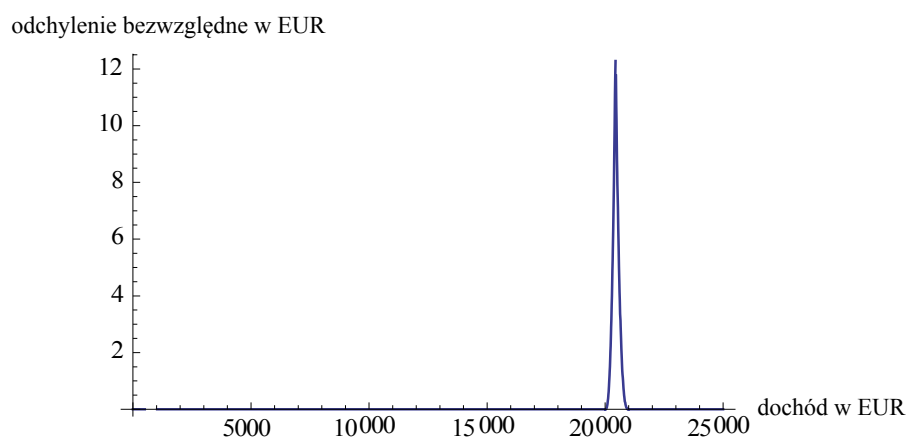


**Rys. 5.** Splajen funkcji taryfowej dla nieróżniczkowalnego punktu  $x = 20.441,20$

Źródło: Obliczenia własne.

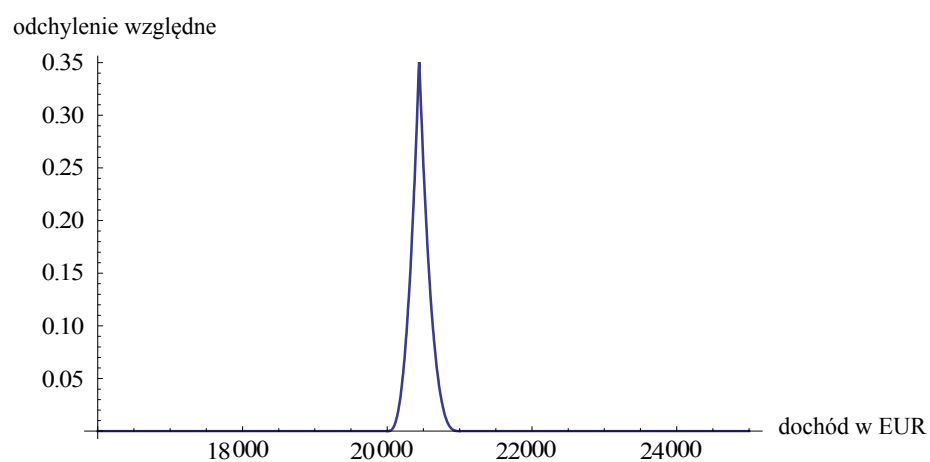
$$S_P(x) = \begin{cases} 0 & 0 \leq x < 500 \\ e_1(x) & 500 \leq x < 1.000 \\ -132,889 + 0,18x & 1.000 \leq x < 20.000 \\ e_2(x) & 20.000 \leq x < 21.000 \\ 3546,53 + 0,32(-20441,20 + x) & x \geq 21.000 \end{cases} \quad (43)$$

Rysunki 6 i 7 przedstawiają bezwzględne oraz względne odchylenie funkcji zmodyfikowanej od pierwotnej funkcji taryfowej. Jak wynika z nich, zmodyfikowana funkcja taryfowa dobrze interpoluje polską funkcję taryfową. Najwyższe odchylenie bezwzględne występuje w pobliżu punktu P (20.441,20; 3.546,53) i wynosi 12 €, co odpowiada odchyleniu względnemu w wysokości około 0,35%.



**Rys. 6.** Odchylenie bezwzględne funkcji interpolacyjnej opartej na funkcjach sklepanych od funkcji taryfowej

Źródło: Obliczenia własne.



**Rys. 7.** Odchylenie względne funkcji interpolacyjnej opartej na funkcjach sklepanych od funkcji taryfowej

Źródło: Obliczenia własne.

## Podsumowanie

Przeprowadzone w artykule analizy wskazują na realnie istniejące sposoby i możliwości wyznaczenia najkorzystniejszej wysokości płaconego podatku poprzez wykorzystanie niezależnie czterech różnych podejść. Każde z nich posiada zarówno zalety, jak i wady. Funkcja interpolacyjna na bazie Newtona charakteryzuje się elastycznością poprzez możliwość prostego dołączania dodatkowych węzłów. Metoda oparta na bazie jednomianowej jest przejrzysta, ale mało efektywna dla większej ilości parametrów. Z kolei przy wykorzystaniu bazy Lagrange'a można ją stosunkowo łatwo implementować, trudności sprawia jednak konieczność rozbudowy funkcji o dodatkowy węzeł, wiąże się to bowiem z powtórzeniem obliczeń od początku.

Jakość interpolacji mierzona odchyleniem względnym w stosunku do funkcji taryfowej jest zadowalająca (w granicach 4%), natomiast problemy pojawiają się dla granicznych węzłów dochodów. Poza ich obszarem odchylenia od funkcji taryfowej są zbyt duże. Dla uniknięcia silnych odchyleń można jednak wykorzystać interpolacje funkcjami sklejanymi, co w końcowym efekcie pozwoliło na uzyskanie odchylenia względnego w granicach 0,35%.

## Literatura

- Davies P.J. (2001), *Interpolation and Approximation*, New York.
- Grzesiak S., Józwiak R. (2010), *Wybór formy i miejsca opodatkowania firmy jako problem decyzyjny*, [w:] J. Hozer (red.), *Miscellanea Mikroekonometrii*, Szczecin, s. 271-283.
- Hoffmann S. (2008), *Mathematische Grundlagen für Betriebswirte*, Berlin.
- Schanz S. (2006), *Interpolationsverfahren am Beispiel der Interpolation der deutschen Einkommensteuertariffunktion 2006*, arqus Diskussionsbeiträge zur quantitativen Steuerlehre, Diskussionsbeitrag Nr. 20, s. 31.
- Ustawa z dnia 26 lipca 1991 r. o podatku dochodowym od osób fizycznych – tekst ujednolicony.

## INTERPOLATION OF TARIFF FUNCTION IN OPTIMISATION OF PERSONAL INCOME TAX

**Summary:** The article that refers to selection of technique of optimisation of personal income tax in Polish conditions. Several possible approaches have been presented. The differ with respect to solving method, accuracy and degree of complication. The basis of the research was to present the tariff function and its interpolation on the basis of the following methods: monomial basis, Lagrange basis, Newton basis, spline functions. Procedure of application of above mentioned methods was presented, as well as their ad-

vantages and disadvantages. For comparison and estimation of quality of presented solutions, absolute and relative deviations of interpolation functions from the Polish tariff function were used.

**Keywords:** tariff function, income tax, polynomial interpolation, spline functions.



**Urszula Grzybowska**

Szkoła Główna Gospodarstwa Wiejskiego  
w Warszawie  
Wydział Zastosowań Informatyki i Matematyki  
Katedra Informatyki  
urszula\_grzybowska@sggw.pl

**Marek Karwański**

Szkoła Główna Gospodarstwa Wiejskiego  
w Warszawie  
Wydział Zastosowań Informatyki i Matematyki  
Katedra Informatyki  
marek\_karwanski@sggw.pl

## **SZACOWANIE PARAMETRÓW RYZYKA KREDYTOWEGO PRZY UŻYCIU RODZIN KLASYFIKATORÓW**

**Streszczenie:** Banki stosujące zalecenia Umowy Bazylejskiej II/III zobowiązane są do wyznaczania ryzyka na podstawie szeregu parametrów. Jednym z nich jest procent straty – *Loss Given Default* (LGD). W literaturze LGD traktowany jest jako zmienna losowa, o rozkładzie dwumodalnym. Do szacowania wielkości LGD stosuje się zaawansowane regresyjne modele statystyczne. Alternatywny sposób to wykorzystanie metod data miningowych. Szczególnie atrakcyjne wydają się estymatory typu rodzin klasyfikatorów, które pozwalają na uśrednienie rezultatów wielu „słabych klasyfikatorów” i uzyskanie bardziej precyzyjnych wyników.

Rodziny klasyfikatorów operują tzw. informacją. Problemem jest interpretacja informacji w kategoriach biznesowych. Celem artykułu jest uzgodnienie obu podejść i interpretacji. Przedstawione zostaną wyniki szacowania przy użyciu modeli: ułamkowej regresji logistycznej, beta-regresji, boostingu gradientowego oraz lasów losowych. Porównane zostaną właściwości estymatorów. Obliczenia wykonane zostały na danych rzeczywistych.

**Słowa kluczowe:** ryzyko kredytowe, LGD, metody ensemble, regresja.

### **Wprowadzenie**

Nowe Umowy Kapitałowe (*Revised international capital framework* Basel II i III [www 1, www 2]) zmieniły zasady zarządzania ryzykiem kredytowym i wprowadziły możliwość wykorzystywania przez banki systemów IRB, czyli wewnętrznych systemów ratingowych. Podejście IRB wymaga szacowania

trzech kluczowych parametrów: PD (*Probability of Default*) – prawdopodobieństwo migracji do stanu niewypłacalności w ciągu roku, LGD (*Loss Given Default*) – współczynnika straty z tytułu niewywiązania się klienta z zobowiązań oraz EAD (*Exposure at Default*) – potencjalnego zaangażowania w momencie defaultu.

LGD danej należności wobec kredytobiorcy zdefiniowano jako stratę, którą bank poniesie w przypadku zajścia zdarzenia niewykonania zobowiązań. Jest ona wyrażona w ujęciu procentowym jako część EAD:

$$LGD = \frac{\text{strata ekonomiczna}}{EAD} \quad (1)$$

O ile wyznaczaniu PD poświęcono wiele uwagi zarówno w publikacjach akademickich, jak i literaturze fachowej [Crouhy i in., 2001], modelowanie LGD napotyka trudności [Schuermann, 2004]. Problemem są zarówno brak jednolitych definicji dotyczących *defaultu* oraz straty ekonomicznej, jak i fakt, że banki w pewnym zakresie same decydują, które składniki powinny być uznane za istotne. Zasadniczo LGD oblicza się na bazie danych empirycznych, trudno dostępnych ze względu na specyfikę wyceny straty oraz długiego okresu niezbędnego do ich kolekcji.

W pracy podejmujemy próbę zastosowania nowoczesnych technik uczenia maszynowego: lasów losowych i boostingu gradientowego do szacowania LGD. W praktyce metody maszynowe, choć powszechnie uważane za bardzo obiecujące, nie są stosowane z uwagi na trudności w interpretacji wyników, takich jak np. opis wpływu poszczególnych czynników ryzyka oraz możliwości porównywania z metodami klasycznymi opartymi na innym paradygmacie analitycznym. Metody klasyczne oparte są na minimalizacji wariancji, zaś metody maszynowe na maksymalizacji informacji.

W pracy pokazujemy, że zastosowanie zarówno lasów losowych, jak i boostingu gradientowego stanowi nowe i bardzo obiecujące podejście do szacowania LGD. Rezultaty otrzymane przy pomocy lasów losowych i boostingu gradientowego porównujemy z wynikami uzyskanymi przy pomocy tradycyjnych metod regresji (regresji beta i regresji ułamkowej). Do porównywania modeli wykorzystujemy metody graficzne, m.in. krzywą REC.

## 1. Wyznaczanie LGD w bankach

Straty w ryzyku kredytowym reprezentowane są przez zmienną losową  $L$ . Jej wartość oczekiwana wyznaczana jest jako:

$$E(L) = EAD \cdot LGD \cdot PD \quad (2)$$



Sam czynnik LGD również możemy potraktować jako zmienną losową. LGD związane z transakcjami niebędącymi w stanie *default*, może być postrzegane jako zmienna losowa. LGD dla transakcji w stanie *default* wyznacza się jako procentową utratę wartości w momencie *defaultu*. Jeśli posiadamy kompletną informację na temat wszystkich strat związanych z produktem oraz mamy wybraną metodę obliczania strat, to możemy bezpośrednio obliczyć LGD. Jeżeli jednak informacja nie jest kompletna, LGD jest również zmienną losową.

W niniejszym artykule rozważane będą modele LGD transakcji tzn. obliczana będzie wartość LGD dla każdej transakcji indywidualnie. LGD każdej transakcji związane jest z działaniem różnych czynników ryzyka. Z literatury wiadomo, że wartości LGD wyznaczone dla danych historycznych wykazują dużą zmienność – mamy do czynienia z dwumodalną koncentracją wartości wokół 0.0 (pełny odzysk) oraz 1.0 (całkowita strata).

## 2. Modele LGD

Wartość LGD wyraża się w procentach, jest zatem ułamkową zmienną celu. Do opisu LGD można zastosować szereg metod regresyjnych, np. ułamkową regresję logistyczną albo regresję beta [Loterman i in., 2012]. Model regresji ułamkowej, oznaczany w pracy przez PLogit, został wprowadzony przez Papkego i Wooldridge'a w 1996 r. [Papke i Wooldridge, 1996]. Model ten należy do klasy Uogólnionych Modeli Liniowych (GLM), z logitową funkcją łączącą:

$$G(\beta x) = \frac{1}{1 + \exp(-\beta x)} \quad (3)$$

Model regresji beta do opisu frakcji został wprowadzony w 2004 r. przez Ferrariego i Cribari-Neto [Ferrari i Cribari-Neto, 2004]. Funkcja gęstości prawdopodobieństwa dla  $p > 0$  i  $q > 0$  oraz  $y \in (0,1)$  jest dana wzorem:

$$f(y; p, q) = \frac{y^{p-1}(1-y)^{q-1}}{B(p, q)} = \frac{\Gamma(p+q)}{\Gamma(p)\Gamma(q)} y^{p-1}(1-y)^{q-1} \quad (4)$$

gdzie  $B(\cdot, \cdot)$  oznacza funkcję Beta, zaś  $\Gamma(\cdot)$  oznacza funkcję Gamma. Ferrari i Cribari-Neto zaproponowali transformację parametrów  $p$  i  $q$  na miary koncentracji  $\mu$  oraz rozproszenia  $\phi$ . Mamy

$$E(Y) = \frac{p}{p+q} = \mu \quad (5)$$

$$Var(Y) = \frac{pq}{(p+q)^2(p+q+1)} = \frac{\mu(1-\mu)}{\phi+1}, \text{ gdzie } \phi = p+q \quad (6)$$

Ferrari i Cribari-Neto zastosowali procedurę budowy funkcji wiarygodności analogiczną do teorii Uogólnionych Model Liniowych.

Lasy losowe zostały wprowadzone w 2001 r. przez L. Breimana jako metoda klasyfikacji [Breiman, 2001]. Podejście zaproponowane przez Breimana polega na konstrukcji dużej rodziny nieprzyciętych drzew na losowanych ze zwracaniem ze zbioru obserwacji pseudopróbach uczących. Dodatkowo, w każdym węźle losowanych jest  $m$  zmiennych do podziału ze zbioru wszystkich  $p$  atrybutów. Obserwacja jest klasyfikowana na podstawie głosowania większościowego rodziny drzew.

Algorytm lasów losowych na zbiorze obiektów  $S$  można opisać następująco [Hastie i in., 2009]:

1. Tworzymy  $N$  pseudo-próbek  $\{S_1, \dots, S_N\}$  ze zbioru  $S$ :  
Si: obiekty losowane są z  $S$  wg schematu losowania prostego ze zwracaniem o objętości  $|N|$ .
2. Dla każdego  $i=1, \dots, N$  dokonywana jest losowa selekcja atrybutów ze zbioru  $\{X^*\}$  i budowany jest klasyfikator  $h^*_i = \text{Learn}(S_i; X^*)$ .
3. Wynik uzyskiwany jest poprzez następujące uśrednienie:  $H = [\{h^*_1, \dots, h^*_N\}, \text{majority vote}]$ .

Boosting gradientowy został wprowadzony przez J. Fridmana w 1999 r. Podobnie jak lasy losowe, boosting gradientowy jest rozszerzeniem drzew regresyjnych. W boostingu gradientowym, tak jak w lasach losowych, konstruowana jest rodzina drzew. Konstrukcja kolejnego drzewa oparta jest na poprzednim w taki sposób, aby najefektywniej, czyli w kierunku wektora gradientu, minimalizowana była dana funkcja straty. Algorytm boostingu gradientowego można opisać następująco [Berk, 2008]:

Niech  $Y = \text{learn}(h(X))$  oraz  $b_m(x)$  będą predyktorami  $Y$

$$h(x) = \sum_{m=1}^M b_m(x) = \sum_{m=1}^M \beta_m b(x; \theta_m) \quad (7)$$

1. Podstawiamy:  $h_0(x) \leftarrow 0$
2. Dla  $m=1, \dots, M$  i funkcji straty  $L(\cdot)$ :

$$r(x, y) \leftarrow -\frac{d}{dh} L(h_{m-1}(x), y) \quad (8)$$

$$b_m \leftarrow \arg \min_b \sum_{(x,y)} (b(x) - r(x, y))^2 \quad (9)$$

$$h_m(x) \leftarrow h_{m-1}(x) + v \cdot b_m(x) \quad (10)$$

W algorytmie boostingu gradientowego wykorzystuje się fakt, że do zmiany  $h(x)$  na  $h(x) + vb(x)$  dla małych wartości  $v$  możemy użyć wyrażenia:

$$\sum_{(x,y)} L(h_{m-1}(x) + b_m(x), y) \approx \sum_{(x,y)} L(h_{m-1}(x), y) + \sum_{(x,y)} \frac{d}{dh} L(h_{m-1}(x), y) b_m(x) \quad (11)$$

### 3. Dane

W pracy wykorzystano dane z segmentu małych i średnich przedsiębiorstw pochodzące z jednego z dużych polskich banków. Dane pochodziły z operacyjnych baz danych wykorzystywanych przez różne departamenty bankowe. Dane obejmowały informacje o kliencie i produktach. Do analizy wykorzystano 803 obserwacje i 7 zmiennych, opisanych w tabeli 1.

**Tabela 1.** Zmienne objaśniające wykorzystane w analizie

|    |                                                                                                                                                                                                                           |
|----|---------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|
| X1 | współczynnik spłaty zaciągniętego kredytu, wyznaczany jako stosunek wartości wszystkich spłaconych kredytów do wartości wszystkich zaciągniętych/przyznanych kredytów;                                                    |
| X2 | suma zaległości odsetkowych w momencie analizy;                                                                                                                                                                           |
| X3 | flaga informująca o tym, czy w ciągu ostatnich 12 miesięcy doszło do spadku liczby zabezpieczeń ustanowionych na kliencie;                                                                                                |
| X4 | średnie opóźnienie w spłatach (w dniach) wyznaczone jako iloraz liczby dni wszystkich opóźnień w spłatach na wszystkich rachunkach posiadanych przez klienta przez liczbę wszystkich rachunków posiadanych przez klienta; |
| X5 | współczynnik spłaty zaciągniętego kredytu, wyznaczany jako stosunek wartości wszystkich spłaconych kredytów do wartości wszystkich zaciągniętych/przyznanych kredytów;                                                    |
| X6 | liczba wszystkich aktywnych rachunków posiadanych przez klienta banku (rachunki, których klient jest pierwszym właścicielem oraz te, których jest współwłaścicielem);                                                     |
| X7 | miesięczna wysokość obciążeń na wszystkich rachunkach OVERDRAFT klienta.                                                                                                                                                  |

Źródło: Karwański i in. [2015, s. 5].

### 4. Wyniki

Do estymacji wartości LGD zastosowano dwa modele regresyjne: ułamkową regresję logistyczną, regresję beta oraz dwie metody uczenia maszynowego: lasy losowe i boosting gradientowy. Obliczenia przeprowadzono w pakietach *SAS Foundation* (ver. 9.4) oraz *SAS Enterprise Miner* (ver. 13.2). Do porównania uzyskanych wyników wykorzystano miary oparte na ocenie jakości klasyfikatorów ROC [Koronacki i Ćwik, 2008].

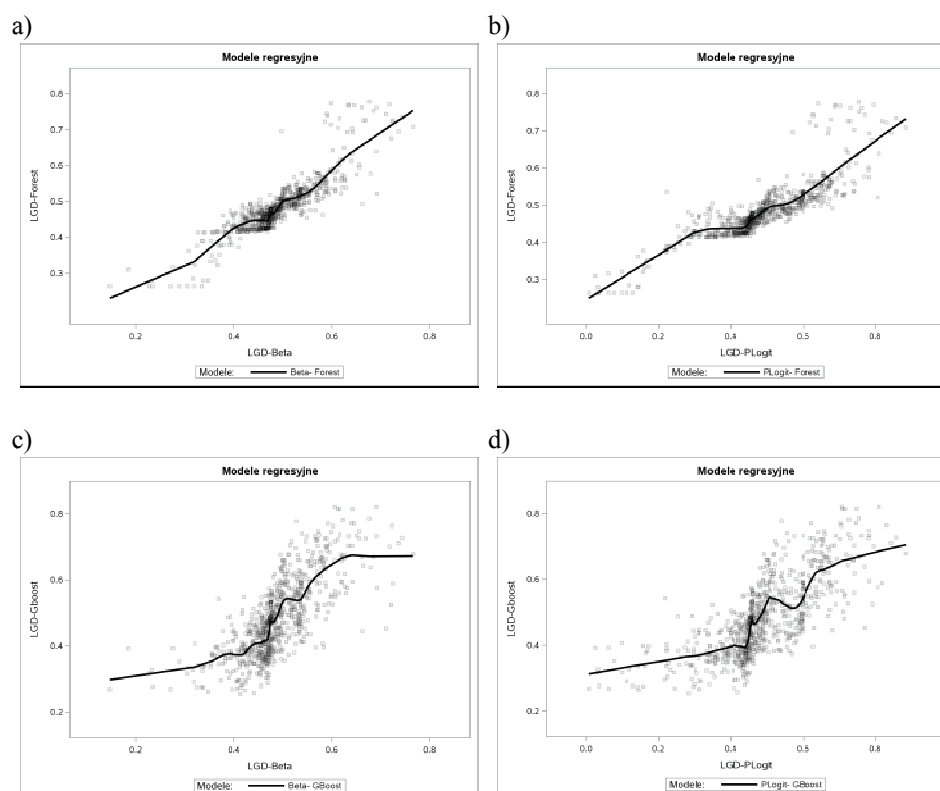
W celu zastosowania miar oceny klasyfikacji modeli zmienną LGD podzielono na dwie kategorie  $\begin{cases} LGD > 0.5 \\ LGD \leq 0.5 \end{cases}$ . Wartości miar dopasowania modeli znajdują się w tabeli 2. Otrzymane wyniki wskazują na lasy losowe i boosting gradientowy jako modele lepsze od klasycznych modeli regresyjnych. Zauważmy, że wyniki dla modelu regresji ułamkowej (PLogit) i regresji beta są dość podobne. Najlepsze dopasowanie uzyskano dla boostingu gradientowego.

**Tabela 2.** Miary dopasowania modeli

| Model                | Mann-Whitney |        |               |        | Somers' D | Gamma  | Tau-a  |
|----------------------|--------------|--------|---------------|--------|-----------|--------|--------|
|                      | AUC          | Błąd   | 95% Prz. Ufn. |        |           |        |        |
| Regresja beta        | 0.6511       | 0.0192 | 0.6134        | 0.6889 | 0.3023    | 0.3023 | 0.1512 |
| Regresja ułamkowa    | 0.6420       | 0.0194 | 0.6040        | 0.6799 | 0.2839    | 0.2839 | 0.1420 |
| Lasy losowe          | 0.6838       | 0.0186 | 0.6474        | 0.7203 | 0.3677    | 0.3699 | 0.1839 |
| Boosting gradientowy | 0.7073       | 0.0182 | 0.6717        | 0.7429 | 0.4146    | 0.4148 | 0.2074 |

Źródło: Obliczenia własne.

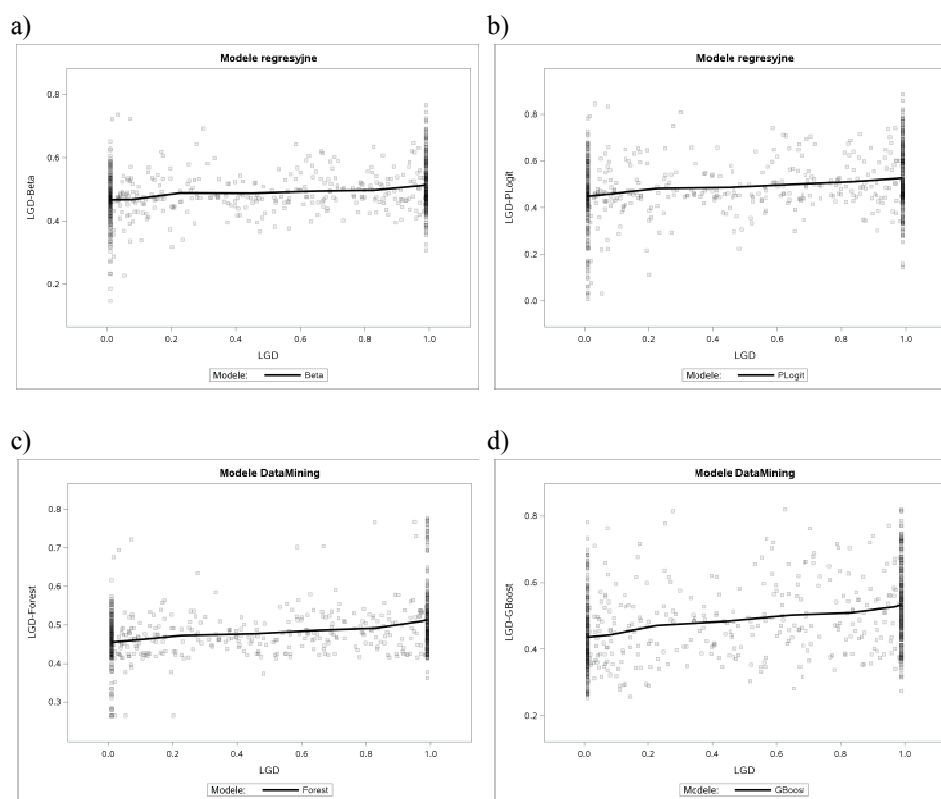
Do dalszych porównań wykorzystana została prezentacja graficzna typu PP-plot (rys. 1). Na osi X znajdują się wartości estymatora LGD liczone dla każdej transakcji wg jednej metody, a na osi Y wg drugiej metody. Odstępstwa od przekątnej wskazują na różnice między porównywanymi metodami. Modele regresyjne oraz model lasu losowego dają zbliżone rezultaty. Jedynie model boostingu gradientowego wykazuje wartości odbiegające od pozostałych modeli, szczególnie dla skrajnych wartości LGD.



**Rys. 1.** Wykresy wartości uzyskanych z modeli na tle danych obserwowanych (puste kwadraty); a) porównanie modelu lasów losowych (Random Forest) oraz regresji beta b) porównanie modelu lasów losowych oraz regresji ułamkowej c) porównanie modelu boostingu gradientowego oraz beta regresji d) porównanie modelu boostingu gradientowego oraz regresji ułamkowej (linia ciągła oznacza trend)

Źródło: Obliczenia własne.

Jako uzupełnienie na rys. 2 przedstawione zostały wykresy PP-plotów dla modeli oraz surowych danych. Widać nadreprezentację wartości LGD bliskich 0.0 oraz 1.0. Stanowi to przesłankę do stosowania modeli dwustopniowych, np. z nadwyżką zer w zerze i jedynce lub modeli płatkowych. Wyniki dla tych modeli nie były dotychczas przedstawiane w literaturze i są przedmiotem naszych dalszych badań. Dostępne publikacje z ostatnich trzech lat dają jedynie częściowe rozwiązanie problemu [Calabrese, 2012; Ospina i Ferrari, 2012].

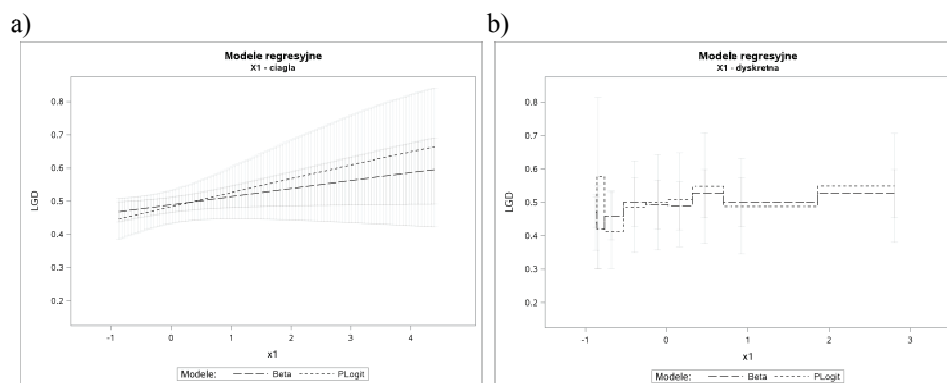


**Rys. 2.** Porównanie wartości LGD wyznaczonych przez poszczególne modele z danymi rzeczywistymi (puste kwadraty); linie ciągłe oznaczają trend

Źródło: Obliczenia własne.

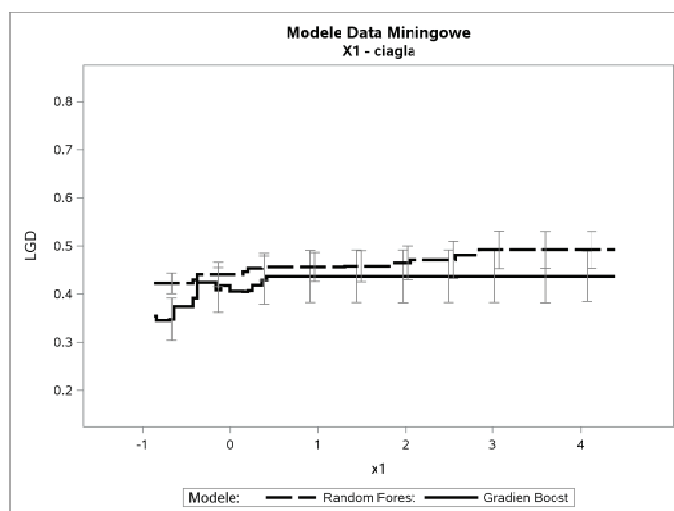
Istotnym elementem oceny modeli była kontrola prognozowanych zmian LGD względem zmian czynników ryzyka. W artykule zaprezentowane zostały wyniki dla zmiennej  $x_1$ . Wyniki dla pozostałych zmiennych były podobne. Na rys. 3 przedstawiony został wykres zmian prognoz LGD przy zmianie czynnika  $x_1$ , pozostałe zmienne przyjmują wartości równe swoim średnim. Lasy losowe i boosting gradientowy opierają się na drzewach decyzyjnych, które wprowadzają dyskretyzację czynników, dlatego dla modeli regresyjnych zastosowano dwa warianty. W pierwszym przypadku użyto surowych danych, gdzie  $x_1$  jest ciągle. W drugim przypadku po transformacji dyskretyzującej do modelowania użyto dyskretne wartości  $x_1$ . Dyskretyzacji zmiennej  $x_1$  dokonano metodą percentylową na 10 przedziałów.

W podobny sposób na rys. 4 zaprezentowane zostały modele lasów losowych i boostingu gradientowego. Przedziały ufności uzyskano metodą bootstrapu [Koronacki i Ćwik, 2008].



**Rys. 3.** Porównanie wartości LGD wyznaczonych przez modele regresji beta i regresji ułamkowej względem zmiennej  $x_1$ ; a)  $x_1$  traktowana jako zmienna ciągła, b)  $x_1$  poddana dyskretyzacji metodą percentylową na 10 przedziałów

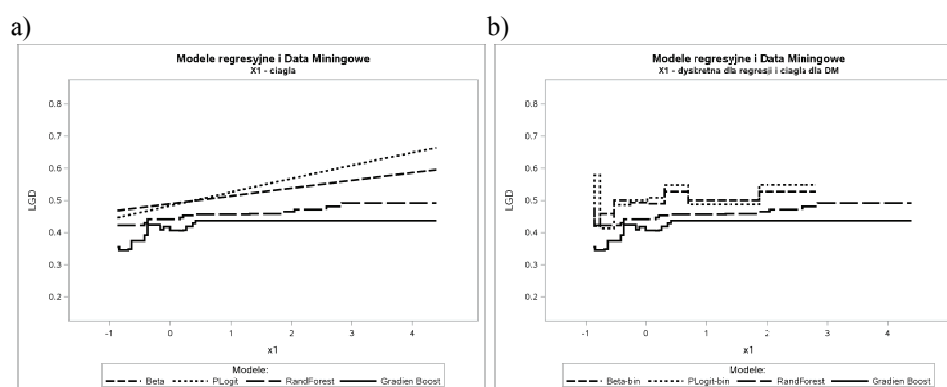
Źródło: Obliczenia własne.



**Rys. 4.** Wartości LGD wyznaczone przy pomocy lasów losowych i boostingu gradientowego wraz z przedziałami ufności

Źródło: Obliczenia własne.

Na rys. 5 pokazano przebiegi zmian prognoz LGD dla wszystkich prezentowanych modeli w zależności od zmiennej  $x_1$ . Zarówno w przypadku ciągłej zmiennej  $x_1$ , jak i  $x_1$  poddanej dyskretyzacji, najniższe wartości wyznaczone zostały przez boosting gradientowy. Z drugiej strony najwyższe wartości dała regresja ułamkowa. Otrzymane wyniki wskazują na dużą zgodność rozważanych modeli.



**Rys. 5.** Porównanie wartości LGD wyznaczonych przez modele regresji beta, regresji ułamkowej, lasów losowych i boostingu gradientowego względem zmiennej  $x_1$ ; a)  $x_1$  traktowana jako zmienna ciągła, b)  $x_1$  poddana dyskretyzacji.

Źródło: Obliczenia własne.

Miary korelacji pomiędzy otrzymanymi prognozami przedstawione zostały w tabeli 3. Współczynniki przy modelu lasów losowych są mniejsze z tego powodu, że zmienność LGD w tym miejscu ma najbardziej płaską strukturę.

**Tabela 3.** Współczynniki korelacji Pearsona

| Współczynniki korelacji Pearsona |               |                   |            |                      |
|----------------------------------|---------------|-------------------|------------|----------------------|
| Model                            | Regresja beta | Regresja ułamkowa | Las losowy | Boosting gradientowy |
| Regresja beta                    | 1.00000       | 0.78750           | 0.06449    | 0.17371              |
| Regresja ułamkowa                | 0.78750       | 1.00000           | 0.07443    | 0.13187              |
| Las losowy                       | 0.06449       | 0.07443           | 1.00000    | 0.18429              |
| Boosting gradientowy             | 0.17371       | 0.13187           | 0.18429    | 1.00000              |

Źródło: Obliczenia własne.



W tabeli 4 zebrane zostały miary zgodności Kappa dla wszystkich modeli. Współczynniki Kappa używane są do kwantyfikacji stopnia zgodności wyników modeli. W praktyce wykorzystuje się progi 0.2 i 0.4 jako wartości odpowiadające „umiarkowanej” oraz „istotnej” zależności. Wartości współczynników w tabeli 4 wskazują, że modele regresyjne są „przeciętnie” powiązane, natomiast rodziny klasyfikatorów „istotnie”.

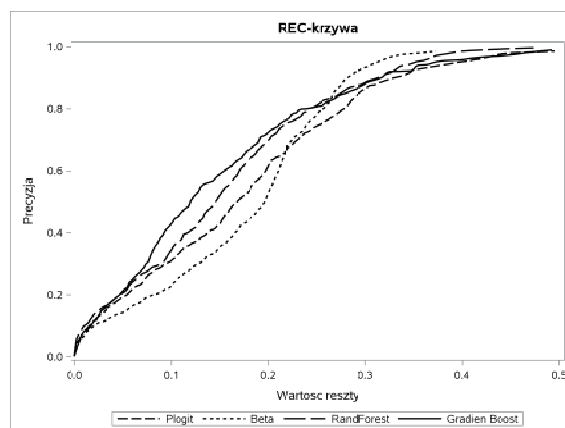
**Tabela 4.** Współczynniki zgodności Kappa

| Współczynniki zgodności Kappa |                   |            |                      |
|-------------------------------|-------------------|------------|----------------------|
| Model                         | Regresja ułamkowa | Las losowy | Boosting gradientowy |
| Regresja beta                 | 0.2430            | -0.0010    | 0.0265               |
| Regresja ułamkowa             | 1                 | 0.06360    | 0.0527               |
| Las losowy                    | 0.06360           | 1          | 0.4356               |

Źródło: Obliczenia własne.

Inne porównanie i ocenę modeli można przeprowadzić przy pomocy krzywej *Regression Error Characteristic* (REC) [Bi i Bennett, 2003]. Krzywa REC jest dystrybuantą reszt modelu i stanowi odpowiednik krzywej ROC wykorzystywany w problemach klasyfikacyjnych do zadań regresyjnych z ciągłą zmienną celu.

REC przedstawia graficznie relację pomiędzy wartością błędu, czyli resztą (na osi x) i precyzją klasyfikatora (na osi y). Precyzja zdefiniowana jest jako procent obserwacji, które znajdują się w granicach błędu. Jeśli jako granicę przyjmimy zero, wówczas tylko punkty, które są klasyfikowane bezbłędnie, będą uważane za prawidłowe. Jeśli wybierzemy granicę, która przekracza maksymalny błąd obserwowany dla modelu, to wszystkie obserwacje zostaną uznane za prawidłowe. Reguły, dla których krzywa REC majoryzuje inne krzywe można uznać za bardziej precyzyjne.



**Rys. 6.** Porównanie krzywych REC dla modeli regresji beta, regresji ułamkowej, lasów losowych i boostingu gradientowego

Źródło: Obliczenia własne.

Na rys. 6 uwidoczniono, że reguła boostingu gradientowego jest lepsza od pozostałych dla przeważającego zakresu wartości reszt. Regresja beta zachowuje się trochę inaczej od pozostałych modeli, co wynika z faktu, że została ona oparta na rozkładzie dwumodalnym.

Pole nad krzywą REC (AOC) jest związane z popularnie stosowaną w liniowych modelach regresyjnych statystyką  $R^2$  i może służyć jako miara dopasowania modelu. W tabeli 5 przedstawione zostały wartości AOC dla modeli opisanych w artykule. Najlepsze dopasowanie wykazuje model boostingu gradientowego.

**Tabela 5.** Pole nad krzywą REC (AOC)

| Model                | Pole nad krzywą REC (AOC) |
|----------------------|---------------------------|
| Boosting gradientowy | 0.1475                    |
| Las losowy           | 0.1523                    |
| Regresja ułamkowa    | 0.1726                    |
| Regresja beta        | 0.1741                    |

Źródło: Obliczenia własne.

## Podsumowanie

Uzyskane wyniki wskazują na znaczne podobieństwo rezultatów uzyskiwanych przy pomocy tradycyjnych metod regresyjnych oraz metod uczenia maszynowego. Dzięki zastosowaniu lasów losowych oraz boostingu gradientowego możliwe jest zwiększenie precyzji szacowania LGD, co ma bardzo istotne znaczenie z punktu widzenia szacowania rezerw kapitałowych w bankach. Do porównywania modeli wykorzystane zostały metody graficzne: wykresy typu PP Plot oraz zasługująca na szczególną uwagę krzywa REC, będąca odpowiednikiem krzywej ROC stosowanej dla modeli klasyfikacyjnych. Wyznaczono także miary, takie jak współczynnik korelacji Pearsona oraz współczynnik zgodności Kappa. Otrzymane w pracy wyniki wskazują, że modele lasów losowych oraz boostingu gradientowego lepiej opisują dane niż tradycyjne modele regresji ułamkowej czy regresji beta. Modele data miningowe mogą być także z powodzeniem wykorzystywane do celów prognostycznych.

## Literatura

- Berk R.A. (2008), *Statistical learning from a regression perspective*, Springer, New York.
- Bi J., Bennett K. (2003), *Regression error characteristic curves*, Proceedings of the 20th International Conference on Machine Learning.
- Breiman L. (2001), *Random Forests*, „Machine Learning”, Vol. 45.
- Calabrese R. (2012), *Regression model for proportions with probability masses at zero and one*. Working Paper. <http://www.ucd.ie/geary/static/publications/workingpapers/gearywp201209.pdf>.
- Crouhy M., Galai D., Mark R. (2001), *Risk Management*, McGraw-Hill, New York.
- Ferrari S.L.P., Cribari-Neto F. (2004), *Beta Regression for Modeling Rates and Proportions*, „Journal of Applied Statistics”, No. 31.
- Hastie T., Tibshirani R., Friedman J. (2009), *The elements of statistical learning. Data Mining, Inference and Prediction*, Springer, New York.
- Karwański M., Gostkowski M., Jałowiecki P. (2015), *LGD Modeling: an application to data from a polish bank*, On-line Risk Journals, available on <http://www.risk.net/>.
- Koronacki J., Ćwik J. (2008), *Statystyczne systemy uczące się*, Akademicka Oficyna Wydawnicza EXIT, Warszawa.
- Loterman G., Brown I., Martens D., Mues Ch., Baesens B. (2012), *Benchmarking regression algorithms for loss given default modeling*, „International Journal of Forecasting”, No. 28.

- Ospina R., Ferrari S.L.P. (2012), *A General Class of Zero-or-one Inflated Beta Regression Models*, „Computational Statistics and Data Analysis”, No. 56.
- Papke L, Wooldridge J. (1996), *Econometric Methods for Fractional Response Variables with an Application to 401(K) Plan Participation Rate*, „Journal of Applied Econometrics”, Vol. 11.
- Schuermann T. (2004), *What Do We Know About Loss Given Default?* The Wharton Financial Institutions Center 04-01.
- [www 1] <http://www.bis.org/publ/bcbsca.htm> (dostęp: 14.04.2015).
- [www 2] <http://www.bis.org/bcbs/basel3.htm?m=3%7C14%7C572> (dostęp: 14.04.2015).

### **FAMILIES OF CLASSIFIERS APPLICATION IN CREDIT RISK PARAMETERS ESTIMATION**

**Summary:** According to the Capital Requirements Directive banks applying the internal rating based approach are obliged to estimate risk based on a set of risk parameters. One of the risk parameters is Loss Given Default (LGD). LGD is treated as a random variable with a bimodal distribution. One can apply advanced statistical models in LGD estimation. An alternative approach is to use data mining methods. The most promising seem to be families of classifiers, that allow for averaging results of many weak classifiers and for obtaining more precise results.

Families of classifiers are built based on information criterion. The problem encountered is interpretation of obtained results in terms of business applications. The aim of the paper is to compare both approaches. We present results of LGD estimation with help of two regression models: fractional and beta regression and two ensemble methods: gradient boosting and random forests. Calculations were done on real life data.

**Keywords:** credit risk, LGD, ensemble methods, regression.



### Andrzej Karpio

Szkoła Główna Gospodarstwa Wiejskiego  
w Warszawie  
Wydział Zastosowań Informatyki i Matematyki  
Katedra Ekonometrii i Statystyki  
andrzej\_karpio@sggw.pl

### Dorota Żebrowska-Suchodolska

Szkoła Główna Gospodarstwa Wiejskiego  
w Warszawie  
Wydział Zastosowań Informatyki i Matematyki  
Katedra Ekonometrii i Statystyki  
zdorota@o2.pl

## RYZIKO RYNKOWE OTWARTYCH FUNDUSZY EMERYTALNYCH MIERZONE KORELACJĄ Z INDEKSEM UWZGLĘDNIAJĄCYM WIG I TBSP<sup>1</sup>

**Streszczenie:** Praca poświęcona jest efektywności inwestycyjnej funduszy emerytalnych. Badania dotyczą lat 2007-2014, czyli okresu sprzed ostatnich zmian ustawowych, które ograniczyły możliwość inwestycji w skarbowe papiery dłużne. Zastosowana metodologia opiera się na klasycznym podejściu wykorzystującym miarę ryzyka rynkowego, jakim jest współczynnik beta w modelu jednowskaźnikowym. Przyjętym czynnikiem rynkowym jest kombinacja liniowa indeksów WIG oraz TBSP, która odzwierciedla poprzednie ograniczenia portfela inwestycyjnego funduszy emerytalnych. Współczynniki beta obliczono dla okresów dwu-, trzy- i czteroletnich, następnie utworzono rankingi funduszy i zbadano stabilność pozycji, jakie zajmowały fundusze w każdym z tych podokresów. Przedmiotem badań była również stabilność współczynników beta w kolejnych podokresach, co wiąże się ze zdolnością zarządzających portfelami inwestycyjnymi dostosowywania się do zmiennej koniunktury rynkowej.

**Słowa kluczowe:** otwarty fundusz emerytalny, współczynnik beta, persystencja.

### Wprowadzenie

Problematyka oceny efektywności inwestycyjnej funduszy emerytalnych była i nadal jest przedmiotem zainteresowania wielu autorów. Wykorzystuje się różne miary, począwszy od „klasycznych” wskaźników Sharpe’a, Treynora, Jen-

<sup>1</sup> Projekt został sfinansowany ze środków Narodowego Centrum Nauki przyznanych na podstawie decyzji numer DEC-2013/09/B/HS4/00493.

sena, poprzez wskaźniki strat i zysków w rodzaju Calmara, UPR lub Omega, kończąc na wskaźnikach uwzględniających benchmark, np. *Information Ratio* i Sharpe'a-Izraelsena. Niniejsza praca poświęcona jest analizie współczynników beta obliczanych dla modelu jednowskaźnikowego z czynnikiem rynkowym będącym kombinacją liniową giełdowego indeksu akcji (WIG) oraz obligacji (TBSP).

Od początku 2014 r. otwarte fundusze emerytalne funkcjonują w nowym otoczeniu prawnym, w szczególności obowiązuje zakaz inwestowania w skarbowe papiery dłużne. Pomijając przyczyny dokonanych zmian ustawowych, ciągle aktualne jest pytanie o efektywność inwestycyjną funduszy emerytalnych. Krótki okres, jaki upłynął od dokonanych zmian, nie pozwala odpowiedzieć na to pytanie przy obowiązujących nowych ograniczeniach nakładanych na portfele funduszy. Dlatego w prezentowanej pracy podjęto próbę zbadania efektywności w od 2007 r. do początku 2014 r. Wybór tych lat podyktowany jest z jednej strony okresem, w którym Giełda Papierów Wartościowych w Warszawie oblicza indeks rynku obligacji TBSP, a z drugiej strony końcem obowiązywania „starej” ustawy. Ponadto w tym przedziale czasowym mieliśmy do czynienia z kryzysem finansowym, dzięki temu uzyskane wyniki pozwalają uwzględnić w badaniach zmienną koniunkturę rynkową. Jest to zagadnienie bardzo ważne z punktu widzenia przyszłych emerytów, bowiem kilkudziesięcioletni czas oszczędzania bez wątplenia będzie zawierał okresy hossy i bessy. Zatem warto zbadać, jak radziły sobie fundusze emerytalne w zmiennej koniunkturze rynkowej w przeszłości, aby wiedzieć, czego ewentualnie można spodziewać się w przyszłości.

Początkowa część pracy zawiera estymację współczynników beta w różnych podokresach, na które podzielono lata 2007-2014 wraz ze sprawdzeniem ich stabilności przy zmianie podokresu. Następnie utworzono rankingi oparte na obliczonych współczynnikach w podokresach oraz zbadano stabilność pozycji rankingowych (persystencję), korzystając ze współczynnika korelacji rangowej Spearmana [Perez, 2012]. W podsumowaniu odniesiono się do wyników badania efektywności inwestycyjnej funduszy emerytalnych oraz persystencji opartych na innych miarach.

## 1. Założenia metodologiczne

W badaniach brano pod uwagę otwarte fundusze emerytalne funkcjonujące na polskim rynku w latach 2007-2014. Ze względu na przejęcia, które miały miejsce w tym czasie, zachowano nazwy funduszy przejmujących. W konsekwencji badania dotyczyły następujących podmiotów: AEGON, Allianz, Amplico,

Aviva, AXA, Bankowy, Generali, ING, Nordea, Pekao, Pocztylion, Polsat, PZU i Warta. Ze względu na ustawowe ograniczenia inwestycyjne przyjęto, że składy portfeli można odnieść do dwóch indeksów: rynku akcji WIG oraz rynku obligacji TBSP z wagami odpowiednio 0,4 i 0,6. Zatem przyjęty w pracy czynnik rynkowy  $I$  w chwili  $t$  przyjmuje wartość:

$$I_t = 0,4 \cdot WIG_t + 0,6 \cdot TBSP_t, \quad (1)$$

gdzie  $WIG_t$  i  $TBSP_t$  są odpowiednio wartościami indeksów w chwili  $t$ . Przebieg czynnika rynkowego w okresie, którego dotyczy badanie, przedstawia rys. 1.



**Rys. 1.** Przebieg czynnika rynkowego  $I$  w latach 2007-2014

Widać wyraźne załamanie się rynku, spowodowane kryzysem finansowym oraz niezbyt dynamiczny trend wzrostowy w kolejnym okresie z niewielką korektą w 2. poł. 2011 r. W tym miejscu należy dodać, że przyjęte wagi odnoszą się do ograniczeń ustawowych, natomiast w praktyce w portfelach OFE udział akcji oscyluje wokół 30%. Jednak zdarzają się momenty, gdy ten udział wzrasta, również zależy on od konkretnego funduszu, dlatego zdecydowano się na sztywne udziały wynikające z ustawy.

Ryzyko rynkowe mierzone korelacją procentowych zmian jednostek uczestnictwa funduszy  $r_{At}$  i zmian indeksu  $RI_t$  wyznaczono z modelu jednowskaźnikowego opisywanego standardowym równaniem [Elton, Gruber, 1998, s. 154]:

$$r_{At} = \alpha_A + \beta_A RI_t + \varepsilon_{At} \quad (2)$$

Subskrypt  $A$  odnosi się do funduszu emerytalnego. Estymatory parametrów strukturalnych  $\alpha_A$  i  $\beta_A$  wyznaczono klasyczną metodą najmniejszych kwadratów na podstawie miesięcznych procentowych zmian jednostek uczestnictwa i indeksu rynkowego. Następnie dokonano weryfikacji modelu, korzystając z testów:  $t$ -Studenta (istotność estymatorów parametrów), zgodności  $\chi^2$  (normalność reszt), White'a (homoskedastyczność), Durбина-Watsona (autokorelacja). Analogicznymi modelami posłużono się w podokresach 2-, 3- i 4-letnich, na które podzielono cały okres badań. W szczególności okresy 2-letnie obejmują lata: 2007-2008, 2009-2010, 2011-2012 oraz 2013-2014, 3-letnie to lata: 2007-2009, 2010-2012. W drugim przypadku badania kończą się na 2012 r., zatem nie uwzględniają lat 2013 i 2014. Okresy 4-letnie obejmują lata: 2007-2010 i 2011-2014. Należy zaznaczyć, że końcową datą jest 31 stycznia 2014 r., więc ilość danych w okresach zawierających rok 2014 jest nieco mniejsza niż w innym czasie.

Stabilność wyznaczonych współczynników beta zbadano, korzystając z testu Chowa, w którym hipotezy były następujące:

$H_0 : \beta_1 = \beta_2$  – równość współczynników beta w dwóch podokresach,

$H_1 : \beta_1 \neq \beta_2$  – współczynniki beta w obu podokresach różnią się.

Niech symbol  $RSK$  oznacza sumę kwadratów reszt modelu, którego parametry szacowane są w pewnym momencie. Natomiast  $RSK_1$  i  $RSK_2$  są odpowiednimi sumami w dwóch sąsiednich podokresach, na które został podzielony rozważany czas badań. Wówczas statystyka testu Chowa, w przypadku modelu z jedną zmienną objaśniającą, zadana jest wzorem [Gruszczyński, Podgórska, 2000, s. 103-104]:

$$F = \frac{\frac{RSK_4}{2}}{\frac{RSK_3}{n-4}} \quad (3)$$

gdzie:  $RSK_3 = RSK_1 + RSK_2$ ,  $RSK_4 = RSK - RSK_3$ , natomiast  $n$  jest sumą obserwacji w podokresach. Parametry  $r_1 = 2$  i  $r_2 = n - 4$  oraz poziom istotności  $\alpha$  wyznaczają wartość krytyczną  $F_{r_1, r_2, \alpha}$  odczytywaną z tablic rozkładu Fishera-Snedecora, nierówność  $F > F_{r_1, r_2, \alpha}$  wyznacza obszar odrzucania hipotezy zerowej.

W każdym z podokresów wyznaczono rankingi oparte na ryzyku rynkowym i obliczono współczynniki korelacji rangowej Spearmana pomiędzy rankingami (oddzielnie dla podokresów o tej samej długości), korzystając ze wzoru [Luszniewicz, Słaby, 2003, s. 291]:

$$r_s = 1 - \frac{6 \sum_{i=1}^n d_i}{n(n^2 - 1)} \quad (4)$$



gdzie  $d_i$  są różnicami między rangami nadanymi obu cechom dla  $i$ -tej oraz  $i + 1$  jednostki obserwacji, natomiast  $n$  jest liczebnością próby. Następnie weryfikowano hipotezę zerową:

$H_0 : r_S = 0$  – współczynnik korelacji rangowej jest nieistotny statystycznie, wobec hipotezy alternatywnej:

$H_1 : r_S \neq 0$  – współczynnik korelacji rangowej jest istotny statystycznie.

Statystyka testowa wyrażona wzorem:

$$t = \frac{r_S}{\sqrt{1 - r_S^2}} \sqrt{n - 2} \quad (5)$$

posiada rozkład  $t$ -Studenta z  $\nu = n - 2$  stopniami swobody. We wszystkich testach przyjęto poziom istotności równy 0,05.

## 2. Ryzyko rynkowe otwartych funduszy emerytalnych

Jak już wspomniano, współczynniki strukturalne modeli jednowskaźnikowych otwartych funduszy emerytalnych estymowano klasyczną metodą najmniejszych kwadratów. W większości przypadków weryfikacja wskazuje na brak homoskedastyczności składników losowych, co jest dosyć charakterystyczne dla modeli finansowych. W konsekwencji estymatory współczynników strukturalnych nie są efektywne, jest to więc niewątpliwa słabość zastosowanej metody estymacji. Jednak pozostałe elementy weryfikacji są zadowalające, dlatego nie podjęto próby zmiany metody estymacji tak, aby poradzić sobie z heteroskedastycznością. Sporadycznie pojawia się autokorelacja i praktycznie zawsze reszty modeli podlegają rozkładowi normalnemu. Natomiast o jakości dopasowania modeli świadczy fakt, że współczynniki determinacji mają duże wartości, bliskie 90% lub większe, tym samym wskazują na trafny dobór czynnika rynkowego.

Przedmiotem badań zaprezentowanych w niniejszej pracy są współczynniki beta, z jednej strony traktowane jako miary ryzyka rynkowego, a z drugiej jako wyznacznik pasywnej polityki inwestycyjnej zarządzających. Można już w tym momencie wspomnieć, że współczynniki beta różnych funduszy emerytalnych są do siebie zbliżone. W konsekwencji poziom korelacji z rynkiem posiadanych portfeli inwestycyjnych budowanych przez zarządzających inwestycjami funduszy jest praktycznie taki sam. Można zatem przypuszczać, że zarządzający stosują pasywny sposób zarządzania, podążając za rynkiem w podobny sposób.

Tabele 1, 2 i 3 przedstawiają wyniki estymacji współczynników beta dla okresów 2-, 3- i 4-letnich, na które podzielono lata 2007-2014. Wyniki podano dla funduszy emerytalnych uporządkowanych alfabetycznie.

**Tabela 1.** Estymacja współczynników beta OFE w podokresach 2-letnich

| Fundusz   | 2007-2008 | 2009-2010 | 2011-2012 | 2013-2014 |
|-----------|-----------|-----------|-----------|-----------|
| AEGON     | 0,77      | 0,58      | 0,83      | 0,93      |
| Alianz    | 0,74      | 0,59      | 0,86      | 0,91      |
| Amplico   | 0,77      | 0,64      | 0,79      | 0,95      |
| Aviva     | 0,82      | 0,64      | 0,81      | 0,95      |
| AXA       | 0,76      | 0,61      | 0,71      | 0,95      |
| Bankowy   | 0,74      | 0,61      | 0,8       | 1,00      |
| Generali  | 0,72      | 0,65      | 0,78      | 0,92      |
| ING       | 0,84      | 0,68      | 0,84      | 1,02      |
| Nordea    | 0,77      | 0,59      | 0,79      | 1,59      |
| Pekao     | 0,82      | 0,62      | 0,85      | 1,00      |
| Pocztalio | 0,75      | 0,61      | 0,82      | 0,95      |
| Polsat    | 0,82      | 0,68      | 0,8       | 0,89      |
| PZU       | 0,81      | 0,70      | 0,83      | 1,00      |
| Warta     | 0,78      | 0,63      | 0,78      | 0,99      |

Zaprezentowane wyniki wskazują wyraźnie na podążanie funduszy za rynkiem, średnie wartości współczynników beta w kolejnych okresach dwuletnich wynoszą odpowiednio: 0,78, 0,63, 0,81, 1,00. W konsekwencji mamy do czynienia ze stosunkowo wysoką średnią w pierwszym okresie, gdy rynek nie odczuwał jeszcze kryzysu. W kolejnym podokresie następuje znaczny spadek średniego współczynnika, natomiast w następnych średnia rośnie. Jest to odzwierciedlenie przebiegu indeksu zaprezentowanego na rys. 1. Współczynniki zmienności obliczone dla kolejnych podokresów wahają się w granicach 5% z wyjątkiem ostatniego podokresu, gdy współczynnik przekracza 16%, ale spowodowane jest to dużą wartością współczynnika beta funduszu Nordea, wyraźnie odstającą od wartości dla pozostałych funduszy. Można zatem stwierdzić, że poziom ryzyka rynkowego funduszy emerytalnych zmienia się nieznacznie w zależności od funduszu i jego zmiany odzwierciedlają zmiany koniunktury rynkowej mierzonej indeksem *I*.

**Tabela 2.** Estymacja współczynników beta OFE w podokresach 3-letnich

| Fundusz  | 2007-2009 | 2010-2012 |
|----------|-----------|-----------|
| <i>I</i> | <i>2</i>  | <i>3</i>  |
| AEGON    | 0,66      | 0,83      |
| Alianz   | 0,64      | 0,86      |
| Amplico  | 0,70      | 0,78      |
| Aviva    | 0,72      | 0,83      |
| AXA      | 0,67      | 0,74      |

cd. tabeli 2

| 1          | 2    | 3    |
|------------|------|------|
| Bankowy    | 0,68 | 0,80 |
| Generali   | 0,67 | 0,78 |
| ING        | 0,74 | 0,86 |
| Nordea     | 0,67 | 0,81 |
| Pekao      | 0,70 | 0,86 |
| Pocztylion | 0,66 | 0,83 |
| Polsat     | 0,77 | 0,79 |
| PZU        | 0,73 | 0,85 |
| Warta      | 0,70 | 0,79 |

Tabela 3. Estymacja współczynników beta OFE w podokresach 4-letnich

| Fundusz    | 2007-2010 | 2011-2014 |
|------------|-----------|-----------|
| AEGON      | 0,68      | 0,83      |
| Alianz     | 0,66      | 0,84      |
| Amplico    | 0,71      | 0,83      |
| Aviva      | 0,73      | 0,85      |
| AXA        | 0,68      | 0,75      |
| Bankowy    | 0,69      | 0,83      |
| Generali   | 0,68      | 0,81      |
| ING        | 0,76      | 0,89      |
| Nordea     | 0,69      | 0,81      |
| Pekao      | 0,72      | 0,89      |
| Pocztylion | 0,68      | 0,85      |
| Polsat     | 0,77      | 0,80      |
| PZU        | 0,75      | 0,88      |
| Warta      | 0,71      | 0,84      |

Tabele 2 i 3 potwierdzają wcześniej sformułowane wnioski dla okresów dwuletnich. Dodatkowo znika „efekt” dużego współczynnika beta funduszu Nordea w latach 2013-2014. Wprawdzie w tabeli 2 lata te nie zostały uwzględnione, ale w tabeli 3 już tak i wartość współczynnika beta dla tego funduszu nie wyróżnia się w żaden sposób, zatem można przypuszczać, że jego duża wartość w latach 2013-2014 była incydentalna. W rezultacie, w okresach 3-letnich, licząc od najstarszego podokresu, średnie wartości współczynników beta są odpowiednio równe: 0,69 i 0,81, natomiast współczynniki zmienności odpowiednio: 5,2% i 4,4%. Analogiczne wartości w podokresach 4-letnich wynoszą: średnie są równe 0,71 i 0,84, a współczynniki zmienności są odpowiednio równe 4,7% i 4,4%.

Można w tym miejscu zastanawiać się, dlaczego fundusze osiągają bardzo podobne wartości współczynników beta. Wydaje się, że wytłumaczeniem tego faktu może być to, że ocena efektywności, wynikająca z ustawy, opiera się na stopie zwrotu liczonej w oparciu o wyniki osiągnięte przez fundusze, a nie na benchmarku rynkowym, niezależnym od osiągniętych przez nie wyników inwestycyjnych. Zatem, zarządzający nie są skłonni osiągać wyników znacznie lep-

szych niż konkurencja, bowiem zawyżyliby benchmark, co nie musiałoby przełożyć się na znaczny wzrost aktywów, a w przyszłości mogłoby im samym przysporzyć „kłopotów”. Podstawą zysku funduszy są opłaty: prowizja od wpłacanej składki i opłata za zarządzanie. Ta druga pobierana jest od całości aktywów, wprawdzie w niewielkim stopniu zmienia się w zależności od wyników inwestycyjnych, ale prawdopodobnie „gra nie jest warta świeczki” i fundusz zadowala się pobieranymi opłatami, nie starając się znacznie poprawiać swoich wyników inwestycyjnych.

W celu odpowiedzi na pytanie, czy ryzyko systematyczne funduszy emerytalnych istotnie różni się w poszczególnych podokresach, skorzystano z testu Chowa. Do zbadania stabilności współczynników pomiędzy podokresami 2-, 3- i 4-letnimi w teście Chowa przyjęto okres będący sumą dwóch sąsiednich podokresów. Na przykład, podokresom 2007-2008 i 2009-2010, odpowiada okres 2007-2010. Analogicznie postąpiono z podokresami 3- i 4-letnimi.

Biorąc pod uwagę początkowe podokresy 2-letnie, stwierdzono, że w latach 2007-2010 współczynniki beta zmieniały się. Jedynie w niektórych przypadkach nie różniły się ze statystycznego punktu widzenia (były stabilne). W szczególności dotyczy to funduszy Generali, Polsat, PZU w podokresach 2007-2008 i 2008-2009 i jedynie funduszu Polsat w 2009-2010 i 2011-2012. Sytuacja ulega radykalnej zmianie w przypadku lat 2011-2012 i 2013-2014. Wówczas ryzyko systematyczne każdego z funduszy było jednakowe. Zatem biorąc pod uwagę okresy 2-letnie, znaczne zróżnicowanie współczynników beta pojawiało się w czasie „zawirowań” na rynku. Natomiast przy umiarkowanym trendzie wzrostowym ryzyko systematyczne pozostawało stałe (lata 2011-2012 i 2013-2014).

Sformułowany wyżej wniosek znajduje swoje potwierdzenie w przypadku podokresów 3- i 4-letnich. Stabilność współczynników beta zaobserwowano pomiędzy podokresami trzyletnimi tylko dla funduszy Amplico, AXA, Polsat i PZU oraz czteroletnimi dla funduszy AXA i Polsat. Można zatem ponownie zauważyć, iż w podokresach zmieniającej się koniunktury rynkowej tylko dla pojedynczych funduszy współczynniki beta były jednakowe ze statystycznego punktu widzenia. Zupełnie inaczej sytuacja przedstawiała się w podokresach o podobnej koniunkturze rynkowej tj. latach 2011-2014, kiedy to współczynniki beta dla wszystkich funduszy okazały się jednakowe ze statystycznego punktu widzenia.

### **3. Stabilność pozycji rankingowych opartych na ryzyku rynkowym**

W pewnym stopniu postawioną tezę o braku funduszy wyróżniających się na tle rynku potwierdzają rankingi utworzone na podstawie współczynników beta. Warto wspomnieć, że począwszy od 2009 r. mamy do czynienia z trendem wzro-

stowym, co widać na rys. 1. W rezultacie fundusze powinny dążyć do osiągnięcia możliwie dużej korelacji z rynkiem, co oznaczałoby wykorzystywanie koniunktury do zwiększenia stopy zwrotu. Najlepiej, aby w trendzie wzrostowym współczynniki beta były większe od jedności, ale jak pokazują wyniki, sytuacja taka praktycznie się nie zdarzyła. Tabele 4, 5 i 6 przedstawiają pozycje rankingowe oparte na ryzyku rynkowym w podokresach 2-, 3- i 4-letnich. Komórki z pogrubionymi konturami wskazują pozycję pierwszą w rankingu, a wypełnione szarym kolorem – ostatnią.

**Tabela 4.** Rankingi OFE w podokresach 2-letnich

| Fundusz    | 2007-2008 | 2009-2010 | 2011-2012 | 2013-2014 |
|------------|-----------|-----------|-----------|-----------|
| AEGON      | 9         | 14        | 4         | 11        |
| Alianz     | 13        | 13        | 1         | 13        |
| Amplico    | 7         | 5         | 11        | 9         |
| Aviva      | 3         | 6         | 7         | 7         |
| AXA        | 10        | 11        | 14        | 10        |
| Bankowy    | 12        | 9         | 8         | 5         |
| Generali   | 14        | 4         | 13        | 12        |
| ING        | 1         | 3         | 3         | 2         |
| Nordea     | 8         | 12        | 10        | 1         |
| Pekao      | 4         | 8         | 2         | 3         |
| Pocztylion | 11        | 10        | 6         | 8         |
| Polsat     | 2         | 2         | 9         | 14        |
| PZU        | 5         | 1         | 5         | 4         |
| Warta      | 6         | 7         | 12        | 6         |

**Tabela 5.** Rankingi OFE w podokresach 3-letnich

| Fundusz    | 2007-2009 | 2010-2012 |
|------------|-----------|-----------|
| AEGON      | 13        | 6         |
| Alianz     | 14        | 2         |
| Amplico    | 5         | 12        |
| Aviva      | 4         | 5         |
| AXA        | 10        | 14        |
| Bankowy    | 8         | 9         |
| Generali   | 9         | 13        |
| ING        | 2         | 1         |
| Nordea     | 11        | 8         |
| Pekao      | 6         | 3         |
| Pocztylion | 12        | 7         |
| Polsat     | 1         | 11        |
| PZU        | 3         | 4         |
| Warta      | 7         | 10        |

**Tabela 6.** Rankingi OFE w podokresach 4-letnich

| Fundusz    | 2007-2010 | 2011-2014 |
|------------|-----------|-----------|
| AEGON      | 13        | 10        |
| Alianz     | 14        | 6         |
| Amplico    | 7         | 8         |
| Aviva      | 4         | 4         |
| AXA        | 12        | 14        |
| Bankowy    | 8         | 9         |
| Generali   | 10        | 11        |
| ING        | 2         | 1         |
| Nordea     | 9         | 12        |
| Pekao      | 5         | 2         |
| Pocztynion | 11        | 5         |
| Polsat     | 1         | 13        |
| PZU        | 3         | 3         |
| Warta      | 6         | 7         |

Uważne przyjrzenie się podanym wynikom pozwala sformułować kilka ważnych wniosków. Po pierwsze, zarówno w krótszych, jak i w dłuższych podokresach brak jest funduszy utrzymujących wysokie pozycje rankingowe w kolejnych podokresach. Szczególnie wyraźnie widać to w tabeli 4, gdy rozkład najlepszych i najgorszych pozycji w różnych podokresach wydaje się zupełnie przypadkowy. Po drugie, nierzadko wysoka pozycja w jednym podokresie sąsiaduje z niską w kolejnym. Przykładami są fundusze Alianz, Generali i Polsat (podokresy 2-letnie), ponownie Alianz i Polsat (podokresy 3-letnie) oraz Alianz i Pocztynion (podokresy 4-letnie). W podanych przykładach powtarza się fundusz Alianz. Nie powinno to dziwić, kiedy się spojrzy na tabelę 4. Widać w niej, że poza latami 2011-2012, gdy zajął on pierwszą pozycję, w pozostałych okresach dwuletnich konsekwentnie utrzymywał się na pozycji przedostatniej. Na wyróżnienie zasługuje fundusz ING, który w różnych podokresach zajmował wysokie pozycje: pierwszą, drugą lub trzecią.

Zaprezentowane wyżej wnioski, wynikające z jakościowego przeglądu wyników zweryfikowano, obliczając współczynniki korelacji rangowej Spearmana pomiędzy rankingami [Menardi, Lisi, 2012], [Phelps, Detzel, 1997]. Uzyskane wyniki przedstawiają tabele 7 i 8.

**Tabela 7.** Współczynniki Spearmana pomiędzy rankingami w podokresach 2-letnich

|                    |                        |                        |                        |
|--------------------|------------------------|------------------------|------------------------|
| Podokresy          | 2007-2008<br>2009-2010 | 2009-2010<br>2011-2012 | 2011-2012<br>2013-2014 |
| Współczynnik $r_s$ | <b>0,5560*</b>         | -0,1385                | 0,1824                 |

\* Współczynnik istotny statystycznie

**Tabela 8.** Współczynniki Spearmana pomiędzy rankingami w podokresach 3- i 4-letnich

|                    |                           |                           |
|--------------------|---------------------------|---------------------------|
|                    | <b>Podokresy 3-letnie</b> | <b>Podokresy 4-letnie</b> |
| Podokresy          | 2007-2009<br>2010-2012    | 2007-2010<br>2011-2012    |
| Współczynnik $r_s$ | 0,0549                    | 0,3846                    |

Jedyny istotny statystycznie współczynnik korelacji rangowej pojawił się w okresie zmiany koniunktury z kryzysowej na postkryzysową, gdy brano pod uwagę okresy 2-letnie. Pozostałe wartości są ze statystycznego punktu widzenia równe zero, zatem nie ma korelacji pomiędzy pozycjami rankingowymi w sąsiednich podokresach. Należy wyraźnie zaznaczyć, że tak sformułowany wniosek dotyczy rynku funduszy, a nie poszczególnych podmiotów. Nie jest on sprzeczny z poczynioną wyżej obserwacją dotyczącą wysokich pozycji funduszu ING i niskich funduszu Alianz. Można wprowadzić znaleźć podmioty radzące sobie lepiej lub gorzej niż inne, ale nie jest to własność dominująca na rynku. Większość funduszy charakteryzuje się dużą zmiennością pozycji rankingowych i jest to cecha prowadząca do nieistotnych statystycznie współczynników korelacji rangowej Spearmana dla sąsiednich podokresów, bez względu na ich długość.

Można zaryzykować twierdzenie, że z punktu widzenia ryzyka systematycznego, fundusze emerytalne tak budują portfele inwestycyjne, że wartości współczynników beta są do siebie zbliżone. Zatem portfele w podobny sposób odzwierciedlają zachowanie się czynnika rynkowego, co oznacza, że pasywna polityka inwestycyjna nie pozwala znaleźć liderów rynku. Co więcej, przypadkowość pozycji rankingowych w kolejnych podokresach świadczy o tym, że jest to cecha charakteryzująca cały rynek funduszy emerytalnych.

## Podsumowanie

Zaprezentowane badania dotyczyły ryzyka systematycznego często niebranego pod uwagę w rankingach funduszy pojawiających się w prasie finansowej. Również ustawodawca, definiując wymaganą stopę zwrotu mającą oceniać wyniki inwestycyjne funduszy, nie uwzględniał ryzyka. Z punktu widzenia efek-

tywności inwestycyjnej można uznać to za duży błąd, bowiem ryzyko jest immanentną cechą rynku kapitałowego. Dlatego oszczędzający w funduszach emerytalnych powinni zdawać sobie sprawę z tego, jak podmioty, którym powierzają swoje oszczędności, radzą sobie z ryzykiem. Prezentowana praca poświęcona jest analizie podstawowej formy ryzyka, jakim jest ryzyko systematyczne. Posiada ono czytelną interpretację, która może być zaprezentowana szerokiemu gronu osób niebędących profesjonalistami, ale zainteresowanych oszczędzaniem w II filarze emerytalnym.

W pracy dokonano oceny funduszy emerytalnych z punktu widzenia ryzyka rynkowego, starając się, aby ocena była w miarę wszechstronna. W konsekwencji w treści pracy sformułowano wnioski, które nie napawają optymizmem. Podstawowym jest zauważenie, że w zdecydowanej większości przypadków fundusze emerytalne prowadzą bardzo podobną politykę inwestycyjną. Ilościowe charakterystyki pasywnego podejścia do inwestowania przez zarządzających portfelami funduszy nie pozwalają wyróżnić żadnego z nich. Wcześniejsze badania autorów z wykorzystaniem miar efektywności inwestycyjnej potwierdzają sformułowane w pracy wnioski. W szczególności, wskaźniki zysków i strat, takie jak Omega, UPR, Sortino i Calmara dowodzą, że pozycje rankingowe funduszy charakteryzują się przypadkowością i nie pozwalają wyróżnić żadnego z nich w okresach dłuższych niż dwa lata [Karpio, Żebrowska-Suchodolska, 2015]. Badania dotyczyły całego okresu funkcjonowania rynku funduszy, czyli lat 2000-2013.

Mając na uwadze możliwości oszczędzania przez przyszłych emerytów w III filarze, dokonano porównania rynków funduszy emerytalnych i otwartych funduszy stabilnego wzrostu [Karpio, Żebrowska-Suchodolska, 2015]. Wybrana grupa funduszy, z punktu widzenia polityki inwestycyjnej, przypomina fundusze emerytalne. Korzystając ze wskaźników efektywności inwestycyjnej, wymienionych w wyżej cytowanej pracy oraz dodatkowo ze wskaźnika Sharpe'a-Izraelsena, stwierdzono duże podobieństwo pomiędzy rynkami obu grup funduszy. Badania dotyczyły lat 2005-2013, wartości wskaźników obliczone dla funduszy emerytalnych i funduszy stabilnego wzrostu były do siebie podobne. Ponadto zajmowane pozycje rankingowe charakteryzowały się dużą zmiennością, nie pozwalając na wyróżnienie liderów utrzymujących wysokie pozycje w dłuższych okresach. W rezultacie można stwierdzić, że otwarte fundusze stabilnego wzrostu mogą stanowić alternatywę przypominającą fundusze emerytalne dla chcących oszczędzać w III filarze i którzy dokonali wyboru Zakładu Ubezpieczeń Społecznych, rezygnując z funduszy emerytalnych.



## Literatura

- Ekonometria*, (2000), M. Gruszczyński, M. Podgórska (red.), Oficyna Wydawnicza AGH, Warszawa.
- Elton E.J., Gruber M.J. (1998), *Nowoczesna teoria portfelowa i analiza papierów wartościowych*, WIG-Press, Warszawa.
- Karpio A., Żebrowska-Suchodolska D. (2014), *Efektywność inwestycyjna funduszy emerytalnych na tle FIO stabilnego wzrostu*, „Metody Ilościowe w Badaniach Ekonomicznych”, Tom XV Nr 4.
- Karpio A., Żebrowska-Suchodolska D. (2015), *The Persistency Of The Investment Results Of Open-End Pension Funds Existing On The Polish Market*, „Acta Oeconomica”, (przyjęta do druku).
- Luszniewicz A., Słaby T. (2003), *Statystyka z pakietem komputerowym STATISTICA PL*, Wydawnictwo C.H. Beck, Warszawa.
- Menardi G., Lisi F. (2012), *Are Performance Measures Equally Stable?*, „Annals of Finance”, Vol. 8(4).
- Menardi G., Lisi F. (2012), *On the stability of performance measures over time: an empirical study*, „Journal of Performance Measurement”.
- Perez K. (2012), *Persystencja stóp zwrotu polskich funduszy inwestycyjnych*, „Finanse”, nr 1.
- Phelps S., Detzel F.L. (1997), *The nonpersistence of mutual fund performance*, „Quarterly Journal of Business and Economics”, Vol. 36 (2).

### MARKET RISK OF THE OPEN-END PENSION FUNDS MEASURED BY CORRELATION WITH THE INDEX TAKING INTO CONSIDERATION WIG AND TBSP

**Summary:** The paper is devoted to the investment effectiveness of pension funds. The research concerns the years 2007-2014, namely the period before the last legislative changes, which limited the possibility of investing in treasury debt securities. The methodology which was used is based on a classical approach using market risk measure, which is the beta factor in a single-index model. The accepted market coefficient is a linear combination of WIG and TBSP indexes, which reflects the previous limits of the investment portfolio of pension funds. Beta factors were calculated for the two-, three-, as well as four-year periods, then the ratings of funds were created and the stability of the positions of the given funds was examined in each of the subperiods. The subject of the research was also the stability of beta factors in the following subperiods, what is connected with the ability of the portfolio managers to adjust their investments to the changeable market situation.

**Keywords:** open-end pension fund, beta coefficient, persistence.



**Jacek Konciak**

Uniwersytet Łódzki  
Wydział Ekonomiczno-Socjologiczny  
Katedra Ubezpieczeń  
home77@op.pl

## **RYZIKO POŻARU W BUDYNKACH MIESZKALNYCH W POLSCE W LATACH 2000-2010**

**Streszczenie:** W artykule przedstawiono skutki osobowe pożarów mieszkań w Polsce w latach 2000-2010. Każdego roku traci w nich życie ok. 500 osób. Większość to ofiary pożarów mieszkań, z czego 60-70% tych przypadków to ofiary zetknięcia z dymami i toksycznymi produktami spalania. W artykule zaprezentowano przyczyny tak dużych strat osobowych oraz zaproponowano rozwiązanie, które znacząco przyczyni się do poprawy bezpieczeństwa mieszkańców.

**Słowa kluczowe:** zagrożenie pożarowe, ryzyko pożarowe, bezpieczeństwo pożarowe.

### **Wprowadzenie**

Ogień towarzyszy człowiekowi od zarania dziejów. Daje ciepło, poczucie bezpieczeństwa, ale w chwili braku nad nim kontroli – niesie śmierć i zniszczenie. W przypadku gdy proces spalania materiałów palnych nie jest kontrolowany, mamy do czynienia z pożarem. Pożar powstaje w miejscu i czasie najbardziej niekorzystnym dla osoby czy podmiotu, którego dotyczy. Dlatego też, zabezpieczenia i rozwiązania zakresu ochrony przeciwpożarowej rosną wraz z wysokością budynku. W wysokim budynku mogą wystąpić efekty kominowe, czyli pożar rozwinie się szybciej, w konsekwencji czego nastąpi znaczny wzrost temperatury. Drogi ewakuacyjne (jedyna droga ucieczki) mogą ulec zadymieniu, ucieczka osób przebywających w obiekcie nie będzie możliwa. Występuje utrudnione dotarcie ekip ratowniczych do źródła pożaru, co w konsekwencji prowadzi do wydłużenia czasu, jaki upłynie do ugaszenia pożaru.

W Polsce co roku w pożarach mieszkań giną dziesiątki osób, ok. 60-70% przypadków to ofiary zetknięcia z dymami i toksycznymi produktami spalania. Bezpośrednią przyczyną śmierci są najczęściej silnie trujące produkty spalania i rozkładu termicznego: tlenek węgla, chlorowodór, cyjanowodór.

Pożary w mieszkaniach powstają pomimo zmian przepisów w zakresie ochrony przeciwpożarowej, rozwoju technologicznego budownictwa mieszkaniowego, poprawy bezpieczeństwa użytkowania urządzeń technicznych.

Osoby poszkodowane w pożarach można podzielić na dwie grupy: ofiary śmiertelne i osoby ranne. Artykuł podejmie próbę ukazania skali występowania poszkodowanych w pożarach mieszkaniowych w Polsce i wybranych krajach świata.

Liczba poszkodowanych w stosunku do liczby mieszkańców to ważny wskaźnik bezpieczeństwa pożarowego. Wskaźnik ten oraz inne będą omówione szerzej w dalszej części artykułu.

W artykule przedstawiono skalę poszkodowanych w pożarach mieszkań<sup>1</sup> w skali Polski na podstawie danych zawartych w bazie danych Komendy Głównej PSP. Artykuł został napisany w oparciu o załączoną literaturę.

W dalszej części artykułu przedstawiona zostanie analiza statystyczna skutków pożarów w budynkach mieszkalnych, jakie powstały w Polsce w latach 2000-2010. W celu zmniejszenia niekorzystnych wpływów zdarzeń losowych (np. wybuch, pożar, zalanie itp.) właściciele nieruchomości i zakłady ubezpieczeniowe powinny wykorzystywać techniki i działania umożliwiające zmniejszenie strat.

## **1. Pojęcia podstawowe**

Pożar jest definiowany w zależności od dziedziny życia, które wykorzystuje to pojęcie do swoich celów. Wśród strażaków i osób zajmujących się bezpieczeństwem pożarowym pożar definiuje się jako niekontrolowany proces spalania, występującym w miejscu do tego nieprzeznaczonym, rozprzestrzeniającym się w sposób niekontrolowany, powodującym zagrożenie dla zdrowia i życia ludzi oraz straty materialne.

Kodeks karny w art. 163 § 1 określa, że spowodowanie zdarzenia niebezpiecznego<sup>2</sup>, mającego postać pożaru, to zdarzenie, które zagraża życiu lub zdrowiu wielu osób albo mieniu w wielkich rozmiarach.

<sup>1</sup> Ranni i osoby śmiertelne spowodowane pożarem lub innym miejscowym zagrożeniem w budynkach mieszkalnych.

<sup>2</sup> W tym przypadku zdarzeniem określany jest pożar.

Zakłady ubezpieczeniowe definiują pożar jako działanie ognia, który przedostał się poza palenisko albo powstał bez paleniska i rozprzestrzenił się o własnej sile.

Termin „zagrożenie” często jest używany i wykorzystywany w opracowaniach technicznych. Dlatego też rozważania na temat zagrożenia prowadzone są w zakresie wiedzy technicznej i możliwości ich wykorzystania w obszarze ekonomii.

Najczęściej spotykanym zagrożeniem w obiektach w czasie całego procesu ubezpieczeniowego jest zagrożenie pożarowe. Zagrożeniem pożarowym budynku mieszkalnego nazywamy zespół elementów budowlanych, instalacyjnych i wyposażenia o określonych parametrach, mających wpływ na możliwość powstania i rozprzestrzeniania się pożaru. Zagrożenie pożarowe uzależnione jest od wielu czynników, np. rodzaju, ilości i struktury fizycznej materiałów palnych.

Termin „ryzyko” jest szeroko stosowany zarówno w normalnym życiu każdego człowieka, jak i w świecie nauki. Przykładowo w codziennej dyskusji: ryzyko zachorowania na gripę w czasie zimy jest całkiem wysokie, lub: ryzyko utraty życia wskutek upadku statku powietrznego jest bardzo małe. W każdym z obszarów nauki termin ryzyko posiada różne znaczenia o odmiennym charakterze. Istotne jest dokładne poznanie ryzyka z uwagi na jego charakter i mnogość definicji.

Ryzyko badanego obszaru ulega zmianie w czasie, wydaje się procesem niż stanem. Do określenia pojęcia ryzyka wykorzystywane są dwa elementy [Przewodnik Zastosowań, s. 10]:

- prawdopodobieństwo – możliwość, szansa wydarzenia się czegoś, bycie prawdopodobnym np. duże, ogromne, małe, znikome prawdopodobieństwo czegoś,
- konsekwencje ryzyka (szkoda) – uraz fizyczny lub uszczerbek na zdrowiu, uszkodzenie mienia lub degradacja środowiska.

Zapewnienie bezpieczeństwa jest naturalnym dążeniem człowieka. Bezpieczeństwo rozumiane jest jako stan niezagrożenia, spokoju, pewności [Kołodziej-ski, 2004, s. 6]. W celu uzyskania oczekiwanego bezpieczeństwa każdy człowiek, grupa społeczna czy organy państwa starają się oddziaływać na swoje otoczenie tak, aby eliminować lub minimalizować wszelkiego rodzaju zagrożenia, których źródłem jest drugi człowiek lub siły natury.

## **2. Metody pomiaru ryzyka pożarowego**

Szukając odpowiedzi na pytanie, jak duże jest ryzyko pożarowe w budynkach mieszkalnych, wielorodzinnych konieczne jest zbadanie częstości (prawdopodobieństwa) występowania pożarów oraz liczba poszkodowanych osób w tych pożarach.

W pozycji pt. *Światowa statystyka ochrony przeciwpożarowej i ratownictwa* Bruhlinsky określił ryzyko pożarowe jako prawdopodobieństwo (częstość szkodliwych oddziaływań) w związku z podejmowanymi działaniami, w wyniku których powstają szkody osobowe i materialne [Bruchlinsky i in., 2008]. Autorzy powyższej pozycji zaproponowali szereg miar ryzyka:

**R<sub>1</sub> Ryzyko** zetknięcia się człowieka z pożarem w określonym interwale czasu.

Miara ryzyka wykorzystuje następujące zależności opisane wzorem:

$$R_1 = \left[ \frac{P}{10^3 \text{ Osoby} \times \text{Rok}} \right], \quad (1)$$

gdzie P – liczba pożarów.

**R<sub>2</sub> Ryzyko** utraty życia lub zdrowia w pożarze przez człowieka. Miara ryzyka wykorzystuje następujące zależności opisane wzorem:

$$R_2 = \left[ \frac{\text{Ofiary}}{10^2 \text{ PP}} \right], \quad (2)$$

gdzie PP – liczba pożarów.

**R<sub>3</sub> Ryzyko** utraty życia lub zdrowia przez człowieka w określonym interwale czasu. Miara ryzyka wykorzystuje następujące zależności opisane wzorem:

$$R_3 = \left[ \frac{\text{Ofiary}}{10^5 \text{ Osoby} \times \text{Rok}} \right] \quad (3)$$

Opisane miary ryzyka zostały przedstawione w tabeli 1.

**Tabela 1.** Miary ryzyka dla mieszkańców w wybranych państwach świata w 2006 r.

| Lp. | Państwo         | Mieszkańcy w tys. | Liczba pożarów | Liczba ofiar śmiertelnych | Liczba ofiar rannych | R <sub>1</sub> średnia liczba pożarów na 1000 mieszkańców | R <sub>2</sub> średnia liczba ofiar śmiertelnych na 100 000 mieszkańców | R <sub>3</sub> średnia liczba ofiar śmiertelnych na 100 pożarów | R <sub>2</sub> średnia liczba rannych na 100 000 mieszkańców | R <sub>3</sub> średnia liczba rannych na 100 pożarów |
|-----|-----------------|-------------------|----------------|---------------------------|----------------------|-----------------------------------------------------------|-------------------------------------------------------------------------|-----------------------------------------------------------------|--------------------------------------------------------------|------------------------------------------------------|
| 1   | 2               | 3                 | 4              | 5                         | 6                    | 7                                                         | 8                                                                       | 9                                                               | 10                                                           | 11                                                   |
| 1.  | Chiny           | 1 321 852         | 223 000        | 1 517                     | 1 418                | 0,2                                                       | 0,1                                                                     | 0,7                                                             | 0,1                                                          | 0,6                                                  |
| 2.  | Indie           | 1 129 868         | 200 000        | 8 500                     | -                    | 0,2                                                       | 0,8                                                                     | 4,3                                                             | -                                                            | -                                                    |
| 3.  | USA             | 301 140           | 1 642 500      | 3 245                     | 16 400               | 5,5                                                       | 1,1                                                                     | 0,2                                                             | 5,4                                                          | 1,0                                                  |
| 4.  | Rosja           | 141 378           | 220 400        | 17 223                    | 13 525               | 1,6                                                       | 12,2                                                                    | 7,8                                                             | 9,6                                                          | 6,1                                                  |
| 5.  | Niemcy          | 82 438            | 187 604        | 424                       | -                    | 2,3                                                       | 0,5                                                                     | 0,2                                                             | -                                                            | -                                                    |
| 6.  | Francja         | 63 714            | 359 300        | 341                       | 11 192               | 5,6                                                       | 0,5                                                                     | 0,1                                                             | 17,6                                                         | 3,1                                                  |
| 7.  | Wielka Brytania | 60 776            | 436 047        | 504                       | 13600                | 7,2                                                       | 0,8                                                                     | 0,1                                                             | 22,4                                                         | 3,1                                                  |
| 8.  | Włochy          | 58 148            | 227 014        | 112                       | 345                  | 3,9                                                       | 0,2                                                                     | 0,0                                                             | 0,6                                                          | 0,2                                                  |
| 9.  | Polska          | 38 647            | 165 353        | 608                       | -                    | 4,3                                                       | 0,4                                                                     | 1,6                                                             | -                                                            | -                                                    |
| 10. | Holandia        | 16 571            | 112 800        | 80                        | 1 089                | 6,8                                                       | 0,5                                                                     | 0,1                                                             | 6,6                                                          | 1,0                                                  |
| 11. | Węgry           | 9 956             | 21 829         | 131                       | 583                  | 2,2                                                       | 1,3                                                                     | 0,6                                                             | 5,9                                                          | 2,7                                                  |

cd. tabeli 1

| 1   | 2             | 3     | 4      | 5   | 6     | 7    | 8    | 9   | 10   | 11  |
|-----|---------------|-------|--------|-----|-------|------|------|-----|------|-----|
| 12. | Szwecja       | 9 031 | 27 106 | 83  | 1 195 | 3,0  | 0,9  | 0,3 | 13,2 | 4,4 |
| 13. | Austria       | 8 200 | 30 297 | 33  | 854   | 3,7  | 0,4  | 0,1 | 10,4 | 2,8 |
| 14. | Bulgaria      | 7 323 | 29 090 | 96  | 290   | 4,0  | 1,3  | 0,3 | 4,0  | 1,0 |
| 15. | Słowacja      | 5 448 | 10 422 | 49  | 185   | 1,9  | 0,9  | 0,5 | 3,4  | 1,8 |
| 16. | Finlandia     | 5 239 | 17 800 | 119 | 461   | 3,4  | 2,3  | 0,7 | 8,8  | 2,6 |
| 17. | Singapur      | 4 553 | 4 702  | 3   | 91    | 1,0  | 0,1  | 0,1 | 2,0  | 1,9 |
| 18. | Nowa Zelandia | 4 116 | 24 405 | 25  | 405   | 5,9  | 0,6  | 0,1 | 9,8  | 1,7 |
| 19. | Litwa         | 3 575 | 22 912 | 307 | 308   | 6,4  | 8,6  | 1,3 | 13,9 | 1,8 |
| 20. | Łotwa         | 2 294 | 17 720 | 235 | 318   | 7,7  | 10,2 | 1,3 | 13,9 | 1,8 |
| 21. | Estonia       | 1 347 | 14 900 | 164 | -     | 11,1 | 12,2 | 1,1 | -    | -   |

Źródło: Bruhlinsky i in. [2008].

W tabeli 1 wskaźnik przedstawiający ryzyko wystąpienia pożaru  $R_1$  (średnia liczba pożarów na 1000 mieszkańców) kształtuje się od 2 do 7. Powyżej 7 wielkość wskaźnika zaobserwowano w Estonii, natomiast dla Chin i Indii (prawdopodobnie z braku dokładnych danych) parametr ten wynosi 0,2.

W większości krajów wymienionych w tabeli 1, wskaźnik ryzyka  $R_2$  (średnia liczba ofiar śmiertelnych na 100 000 mieszkańców), nie przekracza wartości 1. Ryzyko utraty życia  $R_3$  w Rosji i trzech krajach bałtyckich jest kilkunastokrotnie większe i oscyluje w granicach 10. Wartości ryzyka opisane w tabeli, a dotyczące Polski, mieszczą się w granicach średniej.

### 3. Skala poszkodowanych w budynkach mieszkalnych w Polsce

W „Przeglądzie Pożarniczym” nr 11/2013 [Janik, 2013, s. 5], w artykule dotyczącym diagnozy pożarowej autor przedstawia ogólną liczbę pożarów, jakie występują w Polsce, liczbę poszkodowanych w pożarach oraz częstość wystąpienia utraty życia w pożarze na 1 mln mieszkańców.

**Tabela 2.** Pożary i poszkodowani w pożarach w Polsce w latach 2002-2012

| Rok  | Pożary ogółem | Poszkodowani w pożarach ogółem | Ranni w pożarach | Ofiary śmiertelne |                                                               |                              |
|------|---------------|--------------------------------|------------------|-------------------|---------------------------------------------------------------|------------------------------|
|      |               |                                |                  | Ogółem            | Z wyłączeniem pożarów będących następstwem wypadków drogowych | Średnio na 1 mln mieszkańców |
| 1    | 2             | 3                              | 4                | 5                 | 6                                                             | 7                            |
| 2002 | 151 026       | 2814                           | 2327             | 487               | 431                                                           | 11,3                         |
| 2003 | 220 855       | 3454                           | 2932             | 522               | 476                                                           | 12,5                         |
| 2004 | 146 728       | 3392                           | 2911             | 481               | 446                                                           | 11,7                         |
| 2005 | 184 316       | 3739                           | 3143             | 596               | 543                                                           | 14,2                         |
| 2006 | 165 190       | 3625                           | 3059             | 566               | 568                                                           | 14,9                         |

cd. tabeli 2

| 1        | 2       | 3    | 4    | 5   | 6   | 7    |
|----------|---------|------|------|-----|-----|------|
| 2007     | 151 069 | 3639 | 3044 | 595 | 553 | 14,5 |
| 2008     | 161 744 | 4293 | 3699 | 594 | 534 | 14,0 |
| 2009     | 159 122 | 4527 | 3943 | 584 | 540 | 14,2 |
| 2010     | 135 555 | 4776 | 4251 | 525 | 481 | 12,6 |
| 2011     | 171 830 | 4912 | 4325 | 587 | 540 | 14,1 |
| 2012     | 183 847 | 4751 | 4186 | 565 | 523 | 13,6 |
| ŚRED-NIO | 166 480 | 3993 | 3438 | 555 | 512 | 13,0 |

Źródło: Janik [2013, s. 8].

Dane w tabeli 2 ilustrują ogólną liczbę pożarów, jakie występują w Polsce oraz ich skutki osobowe.

W tym miejscu należy zadać pytanie, czy tego rodzaju dane są istotne w procesie badania ryzyka utraty zdrowia i życia w budynkach mieszkalnych.

W celu uzyskania bardziej szczegółowych odpowiedzi, należy postawić następujące pytania, dotyczące pożarów w budynkach mieszkalnych<sup>3</sup>:

- jaka jest liczba pożarów i rannych w pożarach w budynkach mieszkalnych,
- jaka jest liczba pożarów i osób śmiertelnych w pożarach w budynkach mieszkalnych.

Badaną grupą obiektów z bazy danych statystycznych Komendy Głównej PSP są budynki jednorodzinne, w tym bliźniaki, zabudowa szeregowa, budynki wielorodzinne, budynki mieszkalne w gospodarstwach rolnych.

W tabeli 3 przedstawiono liczbę pożarów w obiektach mieszkalnych oraz liczbę rannych i ofiar śmiertelnych (do analizy częstości wystąpienia zdarzenia przyjęto liczbę mieszkańców w Polsce 38 mln).

Z analizy tabeli wynika, że w latach 2000-2010 następował stały wzrost ilości pożarów, jak również wzrost liczby ofiar śmiertelnych. Natomiast liczba osób rannych w analizowanych latach również ma tendencję wzrostową.

**Tabela 3.** Pożary i poszkodowane osoby w pożarach w Polsce w latach 2000-2010 w budynkach mieszkalnych

| Rok  | Pożary mieszkań | Ranni | Ofiary śmiertelne | Liczba pożarów ogółem na 100 tys. mieszkańców |
|------|-----------------|-------|-------------------|-----------------------------------------------|
| 1    | 2               | 3     | 4                 | 5                                             |
| 2000 | 18 574          | 1243  | 353               | 48,88                                         |
| 2001 | 18 889          | 1342  | 377               | 49,71                                         |
| 2002 | 20 179          | 1411  | 368               | 53,10                                         |
| 2003 | 21 216          | 768   | 389               | 55,83                                         |

<sup>3</sup> Budynki jednorodzinne, w tym bliźniaki, zabudowa szeregowa, budynki wielorodzinne, budynki mieszkalne w gospodarstwach rolnych oraz inne obiekty mieszkalne, w szczególności altanki, barakowozy, domki letniskowe.

cd. tabeli 3

| 1    | 2      | 3    | 4   | 5     |
|------|--------|------|-----|-------|
| 2004 | 20 831 | 1942 | 384 | 54,82 |
| 2005 | 22 411 | 2085 | 462 | 58,98 |
| 2006 | 22 448 | 1205 | 482 | 59,07 |
| 2007 | 23 113 | 2081 | 436 | 60,82 |
| 2008 | 23 896 | 2475 | 443 | 62,88 |
| 2009 | 24 514 | 2749 | 425 | 64,51 |
| 2010 | 25 506 | 3070 | 394 | 48,88 |

Źródło: Opracowanie własne na podstawie bazy danych KG PSP.

Z powyższych danych można wyliczyć częstość powstawania szkody na osobie w budownictwie mieszkaniowym w czasie pożaru w Polsce. Jako liczbę obserwacji przyjęto straty osobowe (ranni i ofiary śmiertelne) w pożarach w budynkach mieszkalnych. Natomiast jako próbę statystyczną przyjęto liczbę mieszkańców Polski. Wyniki obliczeń zawarte są w tabeli 4.

**Tabela 4.** Częstość szkody osobowej w pożarach w Polsce w latach 2000-2010 w budynkach mieszkalnych

| Rok  | Częstość – ranni w pożarze | Częstość – ofiary śmiertelne w pożarze |
|------|----------------------------|----------------------------------------|
| 2000 | $3,27 \cdot 10^{-5}$       | $0,93 \cdot 10^{-5}$                   |
| 2001 | $3,53 \cdot 10^{-5}$       | $0,99 \cdot 10^{-5}$                   |
| 2002 | $3,71 \cdot 10^{-5}$       | $0,97 \cdot 10^{-5}$                   |
| 2003 | $2,02 \cdot 10^{-5}$       | $1,02 \cdot 10^{-5}$                   |
| 2004 | $5,11 \cdot 10^{-5}$       | $1,01 \cdot 10^{-5}$                   |
| 2005 | $5,49 \cdot 10^{-5}$       | $1,22 \cdot 10^{-5}$                   |
| 2006 | $3,17 \cdot 10^{-5}$       | $1,27 \cdot 10^{-5}$                   |
| 2007 | $5,48 \cdot 10^{-5}$       | $1,15 \cdot 10^{-5}$                   |
| 2008 | $6,51 \cdot 10^{-5}$       | $1,17 \cdot 10^{-5}$                   |
| 2009 | $7,23 \cdot 10^{-5}$       | $1,12 \cdot 10^{-5}$                   |
| 2010 | $8,08 \cdot 10^{-5}$       | $1,04 \cdot 10^{-5}$                   |

Źródło: Opracowanie własne na podstawie bazy danych KG PSP.

Powyższa tabela ukazuje zmiany w częstości szkód osobowych w pożarach, kształtują się one na poziomie jednej ofiary śmiertelnej na 100 tys. mieszkańców. Natomiast osoby ranne to zakres od 2 do 8 osób na 100 tys. mieszkańców.

W czasie likwidowania zdarzenia niepożądanego, jakim jest pożar, występują również straty osobowe strażaków. W tabeli 5 przedstawiono liczbę pożarów w obiektach mieszkalnych oraz liczbę rannych i ofiar śmiertelnych wśród strażaków PSP.



**Tabela 5.** Pożary i poszkodowani wśród strażaków w pożarach w Polsce w latach 2000-2010 w budynkach mieszkalnych

| Rok  | Pożary | Ranni | Ofiary śmiertelne | Liczba pożarów na 100 tys. mieszkańców |
|------|--------|-------|-------------------|----------------------------------------|
| 2000 | 18 574 | 152   | 1                 | 48,88                                  |
| 2001 | 18 889 | 91    | 0                 | 49,71                                  |
| 2002 | 20 179 | 88    | 0                 | 53,10                                  |
| 2003 | 21 216 | 115   | 3                 | 55,83                                  |
| 2004 | 20 831 | 114   | 2                 | 54,82                                  |
| 2005 | 22 411 | 123   | 0                 | 58,98                                  |
| 2006 | 22 448 | 108   | 1                 | 59,07                                  |
| 2007 | 23 113 | 81    | 0                 | 60,82                                  |
| 2008 | 23 896 | 99    | 0                 | 62,88                                  |
| 2009 | 24 514 | 119   | 0                 | 64,51                                  |
| 2010 | 25 506 | 102   | 0                 | 48,88                                  |

Źródło: Opracowanie własne na podstawie bazy danych KG PSP.

Z tabeli 5 wynika, że średnia liczba ofiar śmiertelnych wśród strażaków jest na poziomie jednej osoby. Natomiast występuje nieregularna zmienność liczby rannych w pożarach strażaków w pożarach.

#### 4. Uwarunkowania, skutki i przyczyny pożarów mieszkań

Mieszkania w budynkach wielorodzinnych są traktowane jako swego rodzaju strefa pożarowa<sup>4</sup>, za którą pożar nie powinien się przedostać. Praktyka jednak wskazuje na to, że pożary, w zależności w jakim obiekcie powstają, charakteryzują się zmienną dynamiką w zakresie wzrostu temperatury i ilości produkowanych gazów pożarowych. Rozwój oraz szybkość rozprzestrzeniania się pożaru jest uzależniona od sposobu budowy oraz użytych materiałów budowlanych. Budynek, który powstał przed II wojną światową wykonany był w techno-

<sup>4</sup> Strefę pożarową określa: § 226 Rozporządzenia Ministra Infrastruktury z dnia 12 kwietnia 2002 r. w sprawie warunków technicznych, jakim powinny odpowiadać budynki i ich usytuowanie.

§ 226 Strefa pożarowa – *pojęcie*

1. Strefę pożarową stanowi budynek albo jego część oddzielona od innych budynków lub innych części budynku elementami oddzielenia przeciwpożarowego, o których mowa w § 232 ust. 4, bądź też pasami wolnego terenu o szerokości nie mniejszej niż dopuszczalne odległości od innych budynków, określone w § 271 ust. 1-7.
2. Częścią budynku, o której mowa w ust. 1, jest także jego kondygnacja, jeżeli klatki schodowe i szyby dźwigowe w tym budynku spełniają co najmniej wymagania określone w § 256 ust. 2 dla klatek schodowych.
3. Powierzchnia strefy pożarowej jest obliczana jako powierzchnia wewnętrzna budynku lub jego części, przy czym wlicza się do niej także powierzchnię antresoli. (Dz.U.2002.75.690).

logii murowanej oraz drewnianej (stropy drewniane, klatka schodowa drewniana lub betonowa oraz palna więźba dachowa) jest niezwykle podatny na szybki rozwój pożaru. W budynkach mieszkalnych wykonanych w technologii tzw. wielkiej płyty i technologii tradycyjnej (elementy budowlane budynku wykonane z materiałów niepalnych), powstały w mieszkaniu pożar w przeważającej większości przypadków w nim się kończy.

Jedną z przyczyn pożaru jest wadliwa instalacja elektryczna wykonana na bazie przewodów aluminiowych (miejsca styku podatne są na utlenianie i utratę przewodności), co może powodować powstawanie zwarć i przepięć, w wyniku których dochodzi do pożarów.

Osoby przebywające w mieszkaniu są narażone na utratę zdrowia i życia z uwagi na różnego rodzaju zagrożenia, jakie występują w związku z funkcjonowaniem budynków mieszkalnych. Warto wymienić najważniejsze rodzaje zagrożeń generujące możliwość powstania strat osobowych (osoby ranne i śmiertelne):

- katastrofa budowlana,
- wybuch gazu,
- pożar i gazy pożarowe,
- zatrucie tlenkiem węgla,
- porażenie prądem elektrycznym.

Bardzo groźnym, a jednocześnie trudnym do wykrycia zagrożeniem jest tlenek węgla. Potocznie zwany czadem, tlenek węgla jest gazem silnie trującym, bezbarwnym i bezwonny, nieco lżejszym od powietrza. Tlenek węgla łatwo się miesza i rozprzestrzenia w powietrzu. Powstaje w wyniku niepełnego spalania wielu paliw m.in.: drewna, oleju, gazu, benzyny, nafty, propanu, węgla, ropy, spowodowanego brakiem odpowiedniej ilości tlenu, niezbędnej do pełnego spalania. Tlenek węgla jest szczególnie groźny w mieszkaniach, w których okna są szczelnie zamknięte lub uszczelnione na zimę.

Czad (potoczna nazwa tlenku węgla) dostaje się do organizmu przez układ oddechowy, a następnie jest wchłaniany do krwiobiegu. W układzie oddechowym człowieka tlenek węgla wiąże się z hemoglobiną 210 razy szybciej niż tlen, blokując dopływ tlenu do organizmu. Stwarza to poważne zagrożenie dla zdrowia i życia człowieka. Uniemożliwia prawidłowe rozprowadzanie tlenu we krwi i powoduje uszkodzenia mózgu oraz innych narządów. Następstwem ostrego zatrucia może być nieodwracalne uszkodzenie ośrodkowego układu nerwowego, niewydolność wieńcowa, zawał albo nawet śmierć.

W obawie przed zatruciem tlenkiem węgla należy unikać sytuacji, w których wystąpi brak dopływu świeżego (zewnątrznego) powietrza do urządzenia, w którym następuje spalanie. Podstawową przyczyną zatruc jest niepełne spalanie, do którego może dojść, np. gdy zbyt szczelnie zamknięte są okna, brak jest właściwej wentylacji. Powoduje to powstawanie czadu i utrudnia jego odpływ.

Urządzenia gazowe powinny być utrzymywane w czystości i w dobrym stanie technicznym, a także okresowo kontrolowane zgodnie z zaleceniami producenta. Obowiązek zachowania wymaganego stanu technicznego urządzeń gazowych i ich udostępnienia do kontroli spoczywa na użytkowniku lokalu<sup>5</sup>. W trosce o bezpieczeństwo własne i swojej rodziny do tego obowiązku powinien się poczuwać każdy użytkownik urządzeń gazowych.

## **5. Wpływ rodzaju własności oraz roku budowy budynków mieszkalnych na możliwość wystąpienia pożaru**

Przyczyny powstawania pożarów mieszkań w literaturze przedmiotu są dobrze opisane. Istnieje natomiast potrzeba przyjrzenia się wpływowi różnego rodzaju czynników na powstawanie pożarów mieszkań. Do czynników mających wpływ na wzrost liczby pożarów możemy zaliczyć czynniki społeczne, techniczne i ekonomiczne.

Przyjrzymy się wpływowi udziału własności mieszkań gminnych i powiatowych na zmianę liczby pożarów w stosunku do obszarów, w których udział mieszkań gminnych jest mniejszy. W drugiej kolejności, czy okres oddania budynku do użytkowania ma wpływ na liczbę pożarów mieszkań (budynki budowane do 1945 r.).

Dane dotyczące ludności, mieszkań i pożarów budynków mieszkalnych miast wojewódzkich w latach 2000-2006 ukazano w tabeli 6.

---

<sup>5</sup> Rozporządzenie Ministra Spraw Wewnętrznych i Administracji z dnia 16 sierpnia 1999 r. w sprawie warunków technicznych użytkowania budynków mieszkalnych (Dz.U. Nr 74 z dnia 9.09.1999 r., poz. 836, § 17 ust. 1 i 2).

**Tabela 6.** Średnioroczne dane dotyczące ludności, mieszkań i pożarów budynków mieszkalnych miast wojewódzkich w latach 2000-2006<sup>6</sup>

| Miasto wojewódzkie | Ludność w miastach wojewódzkich | Mieszkania liczba | Mieszkania zamieszkane wg okresu budowy przed 1945 – liczba | Izby liczba    | Powierzchnia użytkowa mieszkań [m <sup>2</sup> ] ilość | Mieszkania własność gminna ilość | Pożary budynków mieszkalnych ilość | Ilość pożarów mieszkań w budynkach samorządowych |
|--------------------|---------------------------------|-------------------|-------------------------------------------------------------|----------------|--------------------------------------------------------|----------------------------------|------------------------------------|--------------------------------------------------|
|                    | L                               | L <sub>m</sub>    | L <sub>m&lt;1945</sub>                                      | L <sub>I</sub> | L <sub>m2</sub>                                        | L <sub>Lgm</sub>                 | L <sub>pm</sub>                    | L <sub>pm-samorząd</sub>                         |
| Wrocław            | 637 235                         | 240 586           | 76 638                                                      | 807 293        | 14 192 379                                             | 54 202                           | 579                                | 276                                              |
| Toruń              | 208 899                         | 75 506            | 13 980                                                      | 260 022        | 4 258 186                                              | 6 294                            | 106                                | 15                                               |
| Bydgoszcz          | 368 922                         | 134 107           | 26 511                                                      | 459 430        | 7 546 336                                              | 15 960                           | 238                                | 52                                               |
| Lublin             | 355 908                         | 127 965           | 13 533                                                      | 452 578        | 7 336 827                                              | 10 666                           | 295                                | 23                                               |
| Gorzów Wielk.      | 125 594                         | 44 618            | 9 839                                                       | 159 239        | 2 619 535                                              | 7 047                            | 109                                | 30                                               |
| Zielona Góra       | 118 230                         | 43 471            | 6 406                                                       | 149 262        | 2 576 135                                              | 6 394                            | 96                                 | 13                                               |
| Łódź               | 776 185                         | 331 270           | 90 362                                                      | 1 003 442      | 17 072 296                                             | 73 968                           | 887                                | 451                                              |
| Kraków             | 757 350                         | 284 641           | 50 652                                                      | 896 742        | 15 733 040                                             | 25 579                           | 509                                | 19                                               |
| Warszawa           | 1 690 139                       | 726 081           | 94 937                                                      | 2 269 826      | 39 984 886                                             | 104 920                          | 1 601                              | 407                                              |
| Opole              | 128 771                         | 46 428            | 11 386                                                      | 163 767        | 2 877 709                                              | 6 312                            | 101                                | 10                                               |
| Rzeszów            | 160 951                         | 54 023            | 3 762                                                       | 192 156        | 3 280 014                                              | 5 343                            | 69                                 | 2                                                |
| Białystok          | 291 983                         | 108 034           | 5 981                                                       | 387 854        | 6 205 471                                              | 9 194                            | 242                                | 25                                               |
| Gdańsk             | 459 631                         | 167 750           | 36 274                                                      | 560 865        | 9 513 622                                              | 33 845                           | 281                                | 71                                               |
| Katowice           | 321 235                         | 132 664           | 36 535                                                      | 432 001        | 7 559 096                                              | 19 222                           | 186                                | 54                                               |
| Kielce             | 209 927                         | 74 321            | 5 642                                                       | 244 797        | 4 189 981                                              | 4 936                            | 135                                | 11                                               |
| Olsztyn            | 173 751                         | 63 064            | 6 865                                                       | 220 047        | 3 566 064                                              | 7 817                            | 106                                | 27                                               |
| Poznań             | 572 173                         | 215 792           | 48 270                                                      | 747 709        | 13 430 320                                             | 20 300                           | 284                                | 25                                               |
| Szczecin           | 412 682                         | 150 857           | 49 899                                                      | 520 357        | 8 933 153                                              | 27 805                           | 373                                | 108                                              |

Źródło: Opracowanie własne na podstawie bazy danych KG PSP i GUS.

W celu określenia częstości wystąpienia pożaru w budynkach mieszkalnych w stosunku do liczby mieszkań, wykorzystano następujący wzór:

$$P_{Lm} = \frac{L_{pm}}{L_m} * 1000, \quad (4)$$

gdzie:

$P_{Lm}$  prawdopodobieństwo wystąpienia pożaru na 1000 mieszkań,

$L_{pm}$  liczba pożarów mieszkań,

$L_m$  liczba mieszkań.

<sup>6</sup> Z uwagi na trudności w pozyskaniu danych dotyczących miast wojewódzkich, zakres badanych lat to 2000-2006.

Aby określić częstość wystąpienia pożaru w budynkach mieszkalnych w stosunku do liczby mieszkańców, wykorzystano następujący wzór:

$$P_L = \frac{L_{pm}}{L} * 100\ 000, \quad (5)$$

gdzie:

$P_L$  prawdopodobieństwo wystąpienia pożaru na 100 000 mieszkańców,

$L_{pm}$  liczba pożarów mieszkań,

$L$  liczba mieszkańców.

W celu określenia częstości wystąpienia pożaru w budynkach mieszkalnych w stosunku do powierzchni użytkowej mieszkań, wykorzystano następujący wzór:

$$P_{Lm2} = \frac{L_{pm}}{L_{m2}} * 1\ 000\ 000, \quad (6)$$

gdzie:

$P_{Lm2}$  prawdopodobieństwo wystąpienia pożaru na 1 000 000 m<sup>2</sup> powierzchni użytkowej mieszkania,

$L_{pm}$  liczba pożarów mieszkań,

$L_{m2}$  powierzchnia użytkowa mieszkań.

W celu sprawdzenia siły związku między cechami mierzalnymi obliczony zostanie współczynnik korelacji liniowej Pearsona [ $r_{xy}$ ]. Orientacyjnie przyjmuje się, że korelacja między dwoma cechami jest:

- niewyraźna, jeśli  $r_{xy} \leq 0,3$ ,
- średnia, jeśli  $0,3 < r_{xy} \leq 0,5$ ,
- wyraźna, jeśli  $r_{xy} > 0,5$ .

W referacie wyznaczono współczynnik korelacji liniowej Pearsona [ $r_{xy}$ ] dla następujących cech mierzalnych:

- wpływ procentowego udziału mieszkań gminnych w stosunku do całkowitej liczby mieszkań na prawdopodobieństwo wystąpienia pożaru na 1000 mieszkań na rok

$$r_{xy} = +0,52 \quad \text{wyraźna korelacja,}$$

- wpływ procentowego udziału mieszkań wybudowanych przed 1945 r. w stosunku do całkowitej liczby mieszkań na prawdopodobieństwo wystąpienia pożaru na 1000 mieszkań na rok

$$r_{xy} = +0,27 \quad \text{niewyraźna korelacja,}$$

- wpływ procentowego udziału powierzchni mieszkań gminnych w stosunku do całkowitej powierzchni wszystkich mieszkań na prawdopodobieństwo wystąpienia pożaru na 1000 mieszkań na rok

$$r_{xy} = +0,301 \quad \text{średnia korelacja,}$$

- wpływ liczby m<sup>2</sup> mieszkania przypadających na jednego mieszkańca liczby osób przypadających na jedno mieszkanie na prawdopodobieństwo wystąpienia pożaru na 1000 mieszkań na rok

$$r_{xy} = +0,51 \quad \text{wyraźna korelacja.}$$

**Tabela 7.** Prawdopodobieństwo powstania pożaru budynków mieszkalnych w miastach wojewódzkich w latach 2000-2006 oraz procentowy udział czynników mogących mieć wpływ na pożary mieszkań<sup>7</sup>

| Miasto wojewódzkie | Prawdopodobieństwo wystąpienia pożaru na 1000 mieszkań na rok | Prawdopodobieństwo wystąpienia pożaru na 100 000 mieszkańców na rok | Prawdopodobieństwo wystąpienia pożaru na 1000 000 m <sup>2</sup> na rok | Procentowy udział mieszkań gminnych w stosunku do całkowitej liczby mieszkań | Procentowy udział mieszkań wybudowanych przed 1945 r. w stosunku do całkowitej liczby mieszkań | Procentowy udział powierzchni mieszkań gminnych w stosunku do całkowitej powierzchni wszystkich mieszkań | Liczba osób przypadająca na jedno mieszkanie | Liczba m <sup>2</sup> mieszkania przypadająca na jednego mieszkańca |
|--------------------|---------------------------------------------------------------|---------------------------------------------------------------------|-------------------------------------------------------------------------|------------------------------------------------------------------------------|------------------------------------------------------------------------------------------------|----------------------------------------------------------------------------------------------------------|----------------------------------------------|---------------------------------------------------------------------|
|                    | P <sub>Lm</sub>                                               | P <sub>L</sub>                                                      | P <sub>Lm2</sub>                                                        |                                                                              |                                                                                                |                                                                                                          |                                              |                                                                     |
| Wrocław            | 2,41                                                          | 90,80                                                               | 40,77                                                                   | 22,53                                                                        | 31,85                                                                                          | 19,27                                                                                                    | 2,65                                         | 22,27                                                               |
| Toruń              | 1,40                                                          | 50,62                                                               | 24,83                                                                   | 8,34                                                                         | 18,52                                                                                          | 6,55                                                                                                     | 2,77                                         | 20,38                                                               |
| Bydgoszcz          | 1,77                                                          | 64,41                                                               | 31,49                                                                   | 11,90                                                                        | 19,77                                                                                          | 9,85                                                                                                     | 2,75                                         | 20,46                                                               |
| Lublin             | 2,30                                                          | 82,85                                                               | 40,19                                                                   | 8,34                                                                         | 10,58                                                                                          | 6,14                                                                                                     | 2,78                                         | 20,61                                                               |
| Gorzów Wlk.        | 2,44                                                          | 86,79                                                               | 41,61                                                                   | 15,79                                                                        | 22,05                                                                                          | 13,64                                                                                                    | 2,81                                         | 20,86                                                               |
| Zielona Góra       | 2,20                                                          | 80,88                                                               | 37,12                                                                   | 14,71                                                                        | 14,74                                                                                          | 11,38                                                                                                    | 2,72                                         | 21,79                                                               |
| Łódź               | 2,68                                                          | 114,21                                                              | 51,93                                                                   | 22,33                                                                        | 27,28                                                                                          | 18,60                                                                                                    | 2,34                                         | 22,00                                                               |
| Kraków             | 1,79                                                          | 67,19                                                               | 32,34                                                                   | 8,99                                                                         | 17,80                                                                                          | 7,21                                                                                                     | 2,66                                         | 20,77                                                               |
| Warszawa           | 2,20                                                          | 94,70                                                               | 40,03                                                                   | 14,45                                                                        | 13,08                                                                                          | 10,90                                                                                                    | 2,33                                         | 23,66                                                               |
| Opole              | 2,17                                                          | 78,14                                                               | 34,97                                                                   | 13,60                                                                        | 24,52                                                                                          | 11,13                                                                                                    | 2,77                                         | 22,35                                                               |
| Rzeszów            | 1,28                                                          | 43,03                                                               | 21,11                                                                   | 9,89                                                                         | 6,96                                                                                           | 7,16                                                                                                     | 2,98                                         | 20,38                                                               |
| Białystok          | 2,24                                                          | 82,97                                                               | 39,04                                                                   | 8,51                                                                         | 5,54                                                                                           | 6,35                                                                                                     | 2,70                                         | 21,25                                                               |
| Gdańsk             | 1,68                                                          | 61,19                                                               | 29,56                                                                   | 20,18                                                                        | 21,62                                                                                          | 17,32                                                                                                    | 2,74                                         | 20,70                                                               |
| Katowice           | 1,40                                                          | 57,90                                                               | 24,61                                                                   | 14,49                                                                        | 27,54                                                                                          | 12,85                                                                                                    | 2,42                                         | 23,53                                                               |
| Kielce             | 1,81                                                          | 64,13                                                               | 32,13                                                                   | 6,64                                                                         | 7,59                                                                                           | 4,59                                                                                                     | 2,82                                         | 19,96                                                               |
| Olsztyn            | 1,69                                                          | 61,22                                                               | 29,83                                                                   | 12,40                                                                        | 10,89                                                                                          | 9,99                                                                                                     | 2,76                                         | 20,52                                                               |
| Poznań             | 1,31                                                          | 49,55                                                               | 21,11                                                                   | 9,41                                                                         | 22,37                                                                                          | 7,83                                                                                                     | 2,65                                         | 23,47                                                               |
| Szczecin           | 2,47                                                          | 90,32                                                               | 41,73                                                                   | 18,43                                                                        | 33,08                                                                                          | 15,91                                                                                                    | 2,74                                         | 21,65                                                               |

Źródło: Opracowanie własne na podstawie bazy danych KG PSP i GUS.

Z przeprowadzonej analizy wynika, że wyraźny wpływ na prawdopodobieństwo powstania pożaru w budynkach mieszkalnych ma rodzaj własności lokali oraz powierzchnia mieszkania, jaka przypada na jedną osobę.

<sup>7</sup> Z uwagi na trudności w pozyskaniu danych dotyczących miast wojewódzkich, zakres badanych lat to 2000-2006.

## 6. Kierunki działań prewencyjnych w zakresie ograniczenia liczby poszkodowanych w pożarach w Polsce

Działania i rozwiązania, jakie są podejmowane w celu poprawy bezpieczeństwa funkcjonowania budynku, powinny być realizowane w następujących obszarach:

- działania organizacyjno-prawne – utrzymanie porządku i ładu, przeprowadzanie okresowych przeglądów instalacji technicznych, ograniczanie występowania materiałów palnych w miejscach do tego niewyznaczonych,
- inwestycje budowlane – ograniczające rozwój pożaru (tzw. zabezpieczenia bierne), wykonywanie budynku z materiałów niepalnych, wyposażanie obiektu wykonane z trudno zapalnych materiałów, poszczególne mieszkania w budynku wydzielone pożarowo (drzwi przeciwpożarowe w klasie EI30 do mieszkania z klatki schodowej),
- inwestycje w systemy przeciwpożarowe – tzw. zabezpieczenia czynne, system sygnalizacji pożarowej (czujki autonomiczne lub systemy z centralami), system wentylacji pożarowej oraz systemy gaśnicze (stosowany wyjątkowo w budownictwie mieszkaniowym).

Domowe czujki dymu znajdują nabywców w wielu krajach na świecie. Wynika to ze świadomości, że w warunkach pożaru ryzyko utraty życia gwałtownie rośnie. Badania w Wielkiej Brytanii i USA potwierdziły, że zastosowanie urządzeń wczesnego ostrzegania o pożarze redukuje ryzyko śmierci o około 40%<sup>8</sup>.

W Polsce przepisy prawa nie zobowiązują właściciela mieszkania do wyposażenia mieszkań w system sygnalizacji pożaru. Pomimo braku obowiązku instalowania takich aparatów w domach, w Polsce spotyka się coraz częściej indywidualnie zainstalowane tego typu urządzenia w mieszkaniach.

Duży wpływ na obecną liczbę ofiar śmiertelnych, jak i poszkodowanych wśród społeczeństwa, ma niski poziom świadomości w zakresie bezpieczeństwa pożarowego. Mówiąc o świadomości, trzeba mieć na myśli obszar wiedzy pozwalającej na wykrycie ewentualnych zagrożeń, mogących przyczynić się do powstania pożaru. Brak wiedzy dotyczącej podstawowych zaniedbań w zakresie bezpieczeństwa pożarowego, np. obłuzowane gniazdko, przechowywanie karto-

<sup>8</sup> W ciągu 30 lat obecności domowych czujek dymu na świecie, znalazły one uznanie jako doskonałe urządzenia detekcji w takich instytucjach jak ANSI (American National Standards Institute), AS (Australian Standard), BS (British Standard), ULC (Underwriters Laboratories Canada) and ULI (Underwriters Laboratories Inc). Świadczy to o dużej wadze, jaką przykłada się w niektórych krajach do prostych urządzeń wczesnego ostrzegania o pożarze. W krajach takich jak Nowa Zelandia, Wielka Brytania, Stany Zjednoczone, Kanada, domowe czujki dymu uratowały życie wielu osobom, które nieświadomie znalazły się w niebezpieczeństwie.

nów lub innych materiałów palnych w sąsiedztwie źródeł ciepła, może być źródłem pożaru. Jeśli powstanie pożaru w znaczeniu globalnym w budownictwie mieszkaniowym nie jest kwestionowane przez społeczeństwo, to w odniesieniu do swojego mieszkania nie dopuszcza się myśli o możliwości pożaru, argumentując to w różnoraki sposób.

## Podsumowanie

Artykuł ukazał liczbę poszkodowanych osób w pożarach w budynkach mieszkalnych oraz propozycję zmniejszania liczby poszkodowanych:

- liczba poszkodowanych w pożarach w Polsce na przestrzeni analizowanych lat nie zmniejsza się (a nawet występuje tendencja wzrostowa pomimo prowadzonych akcji edukacyjnych i apeli),
- pożary mieszkań, w których giną ludzie, powstają zarówno w krajach rozwiniętych, jak i rozwijających się. Poziom rozwoju gospodarczego i świadomości mieszkańców ma wpływ na częstość występowania pożarów w mieszkaniach oraz na wielkość szkód osobowych i materialnych,
- działaniem, które wpływa na zmniejszenie strat, jest instalowanie czujek dymu lub tlenku węgla. Zalecane zasady rozmieszczania czujek domowych opierają się przede wszystkim na umieszczeniu czujki w korytarzu na każdej z kondygnacji.

W artykule szerzej opisano zagrożenie związane z powstawaniem tlenku węgla oraz skutkami dla ludzi przebywających w jego atmosferze.

Należy zadać sobie tylko pytanie, w jaki sposób zachęcić lub „przymusić” właścicieli i lokatorów budynków mieszkalnych do instalowania czujek dymu i tlenku węgla. Jaką rolę w tym działaniu powinny odegrać np. towarzystwa ubezpieczeniowe.

Pomimo wysiłku badawczego nie udało się ukazać całości podejmowanej tematyki. Należałoby przeprowadzić dalsze pogłębione badania w zakresie szkód osobowych i wartości strat pożarowych.

## Literatura

- Bruhlinśky N.N., Sokolov S.V., Wagner P., Hall J.R. (2008), *Światowa statystyka ochrony przeciwpożarowej i ratownictwa. Raport nr 13. Ocena ryzyka powstania pożaru*, Fundacja Edukacji i Technika Ratownictwa.
- Flis J., Jakubczak R. (2006), *Bezpieczeństwo narodowe Polski w XXI wieku, wyzwania i strategie*, BELLONA, Warszawa.



- Janik P. (2013), *Diagnoza pożarowa*, „Przegląd Pożarniczy” 11/2013.
- Kołodziński E. (2004), *Zagrożenia Bezpieczeństwa i organizacja przeciwdziałania ich skutkom*, XII Konferencja naukowa Automatyzacja dowodzenia, Gdynia-Jurata, 02-04 czerwca 2004 r.
- Nowy Słownik Języka Polskiego PWN*, 2002.
- Stańczyk R. (1996), *Współczesne postrzeganie bezpieczeństwa*, PAN, Warszawa.
- PN-IEC 60300-3-9 *Analiza ryzyka w systemach technicznych. Zarządzanie niezawodnością, przewodnik zastosowań*.
- Rozporządzenia Ministra Infrastruktury z dnia 12 kwietnia 2002 r. w sprawie warunków technicznych, jakim powinny odpowiadać budynki i ich usytuowanie.
- Rozporządzenie Ministra Spraw Wewnętrznych i Administracji z dnia 16 sierpnia 1999 r. w sprawie warunków technicznych użytkowania budynków mieszkalnych.
- Uniwersalny Słownik Języka Polskiego* (2003), S. Dubisz (red.), t V, PWN, Warszawa.
- Wielka Encyklopedia Powszechna*, PWN, 1962.

#### **VICTIMS OF FIRES AND LOCAL THREATS THAT TOOK PLACE IN RESIDENTIAL BUILDINGS IN POLAND IN 2000-2010**

**Summary:** The article presents the personal effects of fire in the years 2000-2010. Each year lose their lives in fires about 500 people. Most victims of fires, falls on the flats, of which 60-70% of these cases the victim is in contact with the fumes and toxic combustion products. The article presents the reasons for such high casualties, and proposes a solution that will significantly contribute to improving the safety of residents.

**Keywords:** fire hazard, fire risk, fire safety.



**Adam Krzemienowski**

Politechnika Warszawska  
Wydział Elektroniki i Technik Informacyjnych  
Instytut Automatyki i Informatyki Stosowanej  
a.krzemienowski@elka.pw.edu.pl

## ZASTOSOWANIE ROZKŁADU NAJGORSZEGO PRZYPADKU DO KONSTRUKCJI STABILNEGO PORTFELA INWESTYCJI FINANSOWYCH<sup>1</sup>

**Streszczenie:** Podstawą konstrukcji portfela inwestycji finansowych jest określenie udziałów poszczególnych aktywów (instrumentów inwestycyjnych). Z matematycznego punktu widzenia zagadnienie to sprowadza się do optymalizacji struktury aktywów portfela w warunkach ryzyka. Jest to problem optymalizacyjny typowo rozwiązywany za pomocą metody Markowitza, która maksymalizuje średnią stopę zwrotu przy minimalizacji miary ryzyka. Praca przedstawia koncepcję rozkładu najgorszego przypadku stóp zwrotu aktywów finansowych, który wykorzystany w modelu Markowitza pozwala poza próbą otrzymać wyniki nie gorsze niż w próbie w sensie rozważanych wskaźników jakości. Rozkład najgorszego przypadku jest definiowany w oparciu o relację dominacji stochastycznej pierwszego rzędu. W pracy posłużono się metodą kopuł. Proponowane podejście zostanie zilustrowane wynikami analizy eksperymentalnej dla wybranych akcji notowanych na Giełdzie Papierów Wartościowych w Warszawie.

**Słowa kluczowe:** portfel inwestycji, optymalizacja, stabilność.

### Wprowadzenie

Podstawą konstrukcji portfela inwestycji finansowych jest określenie udziałów poszczególnych aktywów (instrumentów inwestycyjnych). Z matematycznego punktu widzenia zagadnienie to sprowadza się do optymalizacji struktury aktywów portfela w warunkach ryzyka. Jest to problem optymalizacyjny typowo

<sup>1</sup> Praca została sfinansowana ze środków Narodowego Centrum Nauki przyznanych na podstawie decyzji numer DEC-2012/07/B/HS4/03076.

rozwiązywany za pomocą metody Markowitza [1952], która maksymalizuje średnią stopę zwrotu przy minimalizacji miary ryzyka. Stosując model Markowitza przyjmuje się następujące założenia: historyczne wartości szeregu czasowego stanowią dobrą prognozę przyszłych zachowań stóp zwrotu, proces stochastyczny ich jest stacjonarny, mają one wielowymiarowy rozkład normalny. Znalezienie portfeli dających największą stopę zwrotu przy danym ryzyku i gwarantujących równocześnie najmniejsze ryzyko przy ustalonej stopie zwrotu portfela prowadzi do tzw. portfeli efektywnych, spośród których jest wybierany portfel optymalny. Założenia modelu Markowitza powinny gwarantować generowanie portfeli stabilnych w czasie, czyli takich, które charakteryzują się brakiem fluktuacji ryzyka i średniej stopy zwrotu w odniesieniu do tych wyznaczonych na podstawie danych historycznych. W praktyce założenia modelu Markowitza nie są jednak spełnione. Praca przedstawia koncepcję rozkładu najgorszego przypadku stóp zwrotu aktywów finansowych, który wykorzystany w modelu Markowitza pozwala poza próbą otrzymać wyniki nie gorsze niż w próbie w sensie rozważanych wskaźników jakości. Rozkład najgorszego przypadku jest definiowany w oparciu o relację dominacji stochastycznej pierwszego rzędu.

Praca jest zorganizowana w następujący sposób. Punkty 1 i 2 przedstawiają definicje rozkładu najgorszego przypadku stóp zwrotu dla pojedynczego aktywu finansowego i portfela aktywów finansowych. Punkt 3 przedstawia model optymalizacyjny wykorzystany do przeprowadzenia eksperymentów obliczeniowych. Punkt 4 prezentuje wyniki eksperymentów dla wybranych akcji notowanych na Giełdzie Papierów Wartościowych w Warszawie. Ostatni punkt stanowi podsumowanie pracy.

## 1. Rozkład najgorszego przypadku stóp zwrotu aktywów finansowych

Definicja jednowymiarowego rozkładu najgorszego przypadku stóp zwrotu aktywów finansowych opiera się na relacji dominacji stochastycznej, która jest fundamentalną koncepcją wykorzystywaną w teorii decyzji. Dominacja stochastyczna wywodzi się z teorii majoryzacji [Hardy, Littlewood i Pólya, 1934]. Relacja dominacji stochastycznej została wprowadzona do statystyki przez Manna i Whitney'a [1947] i dalej rozwinięta w kontekście wnioskowania statystycznego przez Blackwella [1953] i Lehmana [1955].

Mając daną przestrzeń probabilistyczną  $(\Omega, \mathcal{F}, P)$  oraz określoną w niej skalarną zmienną losową  $R$ , definiujemy relację dominacji stochastycznej pierw-

szego rzędu w sposób następujący. Mówimy, że zmienna losowa  $R_1$  słabo dominuje zmienną losową  $R_2$  w relacji dominacji stochastycznej pierwszego rzędu (ang. *first degree stochastic dominance* – FSD), co zapisujemy  $R_1 \geq_{FSD} R_2$ , wtedy i tylko wtedy, gdy zachodzi

$$E(u(R_1)) \geq E(u(R_2))$$

dla każdej niemalejącej funkcji użyteczności  $u$ , tj. dla wszystkich preferencji, gdzie większe wartości są preferowane. Możemy alternatywnie scharakteryzować relację FSD z wykorzystaniem dystrybuanty lub funkcji kwantylowej zmiennej losowej. Niech funkcja  $F$  o wartościach rzeczywistych oznacza dystrybuantę zmiennej losowej  $R$ , tj.  $F(\eta) = P(R \leq \eta)$  dla każdego  $\eta \in \mathbb{R}$ . Dalej, niech funkcja  $F^{(-1)}$  będzie jej lewostronnie ciągłą odwrotnością (funkcją kwantylową), tj.  $F^{(-1)}(p) = \inf\{\eta : F(\eta) \geq p\}$  dla  $0 < p \leq 1$ . Zachodzą następujące relacje:

$$\begin{aligned} R_1 \geq_{FSD} R_2 &\Leftrightarrow F_{R_1}(\eta) \leq F_{R_2}(\eta) \quad \forall \eta \in \mathbb{R}, \\ &\Leftrightarrow F_{R_1}^{(-1)}(p) \geq F_{R_2}^{(-1)}(p) \quad \forall p \in (0; 1]. \end{aligned}$$

Dla ciągu niezależnych zmiennych losowych o niejednakowym rozkładzie  $(R_t)_{t \in T}$ , reprezentujących stopy zwrotu aktywów finansowego z przestrzeni probabilistycznej  $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ , zmienna losowa najgorszego przypadku jest definiowana jako:

$$R^w = \sup \{R : R_t \geq_{FSD} R \quad \forall t \in T\}. \quad (1)$$

We wzorze (1) zmienna losowa  $R$  należy do zbioru zmiennych losowych, które są zdominowane przez zmienne losowe  $(R_t)_{t \in T}$  w sensie FSD. Ze uwagi na fakt, że relacja FSD indukuje porządek częściowy, w zbiorze tych zmiennych można znaleźć kres górny, analizując dystrybuanty lub funkcje kwantylowe. Dystrybuanta zmiennej losowej  $R^w$  przyjmuje postać  $F_{R^w}(\eta) = \max(F_{R_t}(\eta) : t \in T)$  dla każdego  $\eta \in \mathbb{R}$ , natomiast funkcja kwantylowa  $F_{R^w}^{(-1)}(p) = \min(F_{R_t}^{(-1)}(p) : t \in T)$  dla  $0 < p \leq 1$ . Zgodnie z powyższą definicją, w każdej chwili czasowej  $t$  proces stochastyczny  $(R_t)_{t \in T}$  daje zwrot z lepszego rozkładu niż rozkład najgorszego przypadku określony dystrybuantą  $F_{R^w}$  (lub funkcją kwantylową  $F_{R^w}^{(-1)}$ ) dla wszystkich modeli preferencji, dla których są preferowane większe wartości. W związku z tym rozkład najgorszego przypadku może być traktowany jako

rozkład niezmienny w czasie, ograniczający z dołu proces stochastyczny stóp zwrotu. Rozkład najgorszego przypadku może być wyznaczany poprzez estymację rozkładów w procedurze przesuwanego okna czasowego i porównywanie kwantyli.

## 2. Rozkład najgorszego przypadku stóp zwrotu portfela aktywów finansowych

Rozważmy  $n$ -wymiarowy wektor losowy  $\mathbf{R} = (R_1^w, \dots, R_n^w)^T$ , którego składowe reprezentują zmienne losowe najgorszego przypadku aktywów finansowych. Zakładamy, że zmienne losowe  $R_i^w$  zależą od siebie w sensie stochastycznym i ich struktura zależności jest dana kopułą (ang. *copula*)  $C$ . W szczególności  $H(\xi, \dots, \zeta) = C(F_{R_1^w}(\xi), \dots, F_{R_n^w}(\zeta))$ , gdzie  $H$  jest dystrybucją łącznego rozkładu wektora losowego  $\mathbf{R}$ .

Tworzenie portfela aktywów finansowych to poszukiwanie optymalnej sumy zmiennych losowych, więc dalej będziemy zainteresowani zdefiniowaniem rozkładu najgorszego przypadku dla sumy zmiennych losowych  $S = R_1^w + \dots + R_n^w$  ze strukturą zależności daną kopułą  $C$ . Możemy wyznaczyć dystrybucję sumy  $S$  z wykorzystaniem całek wielowymiarowych:

$$\begin{aligned} F(s) = P(S \leq s) &= \int_{A(s)} dC(F_{R_1^w}(r_1), \dots, F_{R_n^w}(r_n)) \\ &= \int_{B(s)} dC(u_1, \dots, u_n), \end{aligned} \quad (2)$$

gdzie zbiór  $A$  jest definiowany jako  $A(s) = \{(r_1, \dots, r_n) : r_1 + \dots + r_n \leq s\}$ , a zbiór  $B$  jako  $B(s) = \{(u_1, \dots, u_n) : F_{R_1^w}^{(-1)}(u_1) + \dots + F_{R_n^w}^{(-1)}(u_n) \leq s\}$ . Dla ciągu niezależnych zmiennych losowych o niejednakowym rozkładzie  $(S_t)_{t \in T}$ , reprezentujących sumy stóp zwrotu aktywów finansowych, zmienna losowa najgorszego przypadku jest definiowana jako:

$$S^w = \sup \{S : S_t \geq_{FSD} S \quad \forall t \in T\}.$$

Podobnie jak wyżej, dystrybucja zmiennej losowej  $S^w$  przyjmuje postać  $F_{S^w}(s) = \max(F_{S_t}(s) : t \in T)$  dla każdego  $s \in \mathbb{R}$ , natomiast funkcja kwantylowa  $F_{S^w}^{(-1)}(p) = \min(F_{S_t}^{(-1)}(p) : t \in T)$  dla  $0 < p \leq 1$ .

Wprowadźmy definicję porządku zależności stochastycznej (ang. *concordance ordering*) [Joe, 1997], który ułatwi estymację rozkładu najgorszego przypadku dla sumy zmiennych losowych. Kopuła  $C$  może być przedstawiona jako  $C(u_1, \dots, u_n) = P(U_1 \leq u_1, \dots, U_n \leq u_n)$ , gdzie  $(U_1, \dots, U_n) = (F_1(R_1), \dots, F_n(R_n))$ , podobnie komplementarna kopuła  $\bar{C}(u_1, \dots, u_n) = P(U_1 > u_1, \dots, U_n > u_n)$ . Mówimy, że kopuła  $C_1$  jest mniejsza lub równa kopule  $C_2$  w porządku zależności stochastycznej, co zapisujemy  $C_1 \leq_c C_2$ , wtedy i tylko wtedy, gdy zachodzi

$$C_1(\mathbf{u}) \leq C_2(\mathbf{u}) \text{ i } \bar{C}_1(\mathbf{u}) \leq \bar{C}_2(\mathbf{u}) \quad \forall \mathbf{u} \in [0; 1]^n.$$

Następujące twierdzenie jest prawdziwe. Jeżeli zmienna losowa  $S_1$ , reprezentująca sumę zmiennych losowych najgorszego przypadku, ma dystrybuantę  $F_{S_1}(s) = \int_{r_1 + \dots + r_n \leq s} dC_1(F_{R_1^w}(r_1), \dots, F_{R_n^w}(r_n))$  i podobnie zmienna losowa  $S_2$  ma dystrybuantę  $F_{S_2}(s) = \int_{r_1 + \dots + r_n \leq s} dC_2(F_{R_1^w}(r_1), \dots, F_{R_n^w}(r_n))$ , to

$$C_1 \leq_c C_2 \Rightarrow S_1 \geq_{FSD} S_2. \quad (3)$$

Dowód twierdzenia wynika z definicji porządku zależności stochastycznej i reprezentacji (2).

Opierając się na zależności (3), możemy zdefiniować kopułę najgorszego przypadku, która pozwoli wyznaczyć sumę zmiennych losowych najgorszego przypadku. Mając dany ciąg kopuł  $(C_t)_{t \in T}$ , kopuła najgorszego przypadku jest definiowana jako:

$$C^w = \inf\{C : C_t \leq_c C \quad \forall t \in T\}.$$

Estymacja rozkładu najgorszego przypadku dla sumy zmiennych losowych sprowadza się do estymacji najmniejszej kopuły w porządku zależności stochastycznej, ograniczającej z góry ciąg kopuł. Ta kopuła wraz z jednowymiarowymi rozkładami najgorszego przypadku powinna być użyta jako źródło danych dla modelu optymalizacji portfela.

### 3. Model optymalizacyjny

W pracy wykorzystano model optymalizacji portfela z warunkową wartością zagrożoną (ang. *Conditional Value-at-Risk* – CVaR) [Rockafellar i Uryasev, 2000] jako miarą ryzyka. CVaR jest miarą koherentną [Pflug, 2000] i liczne

badania empiryczne [zob. np. Rockafellar i Uryasev, 2002; Mansini, Ogryczak i Speranza, 2003] potwierdziły jej przydatność w różnych zagadnieniach finansowych. Optymalizowano miarę ryzyka, opierając się na dualnym modelu programowania liniowego, zaproponowanym przez Ogryczaka i Śliwińskiego [2011]. Wykorzystano wariant uwzględniający ograniczenia na średnią stopę zwrotu i wielkość udziałów portfela:

$$\begin{aligned}
 \min_{q, s, u_t, v_j} \quad & q - \mu_0 s + \sum_{j=1}^n x^g v_j \\
 \text{p.o.} \quad & q - \mu_j s - \sum_{t=1}^m r_{jt} u_t + v_j \geq 0 \quad \text{dla } j = 1, \dots, n, \\
 & \sum_{t=1}^m u_t = 1, \\
 & s \geq 0, \\
 & 0 \leq u_t \leq p_t / \beta \quad \text{dla } t = 1, \dots, m, \\
 & v \geq 0.
 \end{aligned} \tag{4}$$

W powyższym sformułowaniu  $r_{jt}$  oznacza prostą stopę zwrotu  $j$ -tego aktywu ( $j = 1, \dots, n$ ) dla realizacji  $t$  ( $t = 1, \dots, m$ ) wektora losowego  $\mathbf{R} = (R_1^w, \dots, R_n^w)^T$ ,  $p_t$  oznacza prawdopodobieństwo realizacji  $t$ ,  $\beta \in (0; 1]$  oznacza poziom tolerancji CVaR. Parametry  $\mu_j$  oznaczają wartości średnie zmiennych losowych  $R_j^w$ ,  $\mu_0$  oznacza ograniczenie dolne na średnią stopę zwrotu portfela, natomiast  $x^g$  reprezentuje ograniczenie górne na udziały portfela. W optimum wartość funkcji celu reprezentuje CVaR, a zmienne dualne ograniczeń (4) reprezentują udziały portfela. Model dualny pozwala uwzględnić istotnie więcej realizacji wektora losowego  $\mathbf{R}$  niż model primalny, ponieważ ograniczenia związane z realizacjami wektora  $\mathbf{R}$  tworzą ograniczenia kostkowe (ang. *simple upper bounds*) i nie wpływają na złożoność obliczeniową problemu.

#### 4. Eksperymenty obliczeniowe

Do eksperymentów obliczeniowych wykorzystano notowania spółek wchodzących w skład indeksów WIG30 i WIG50 Giełdy Papierów Wartościowych w Warszawie. Przyjęto kwartalne stopy zwrotu, okres w próbie 2002-2011 i poza próbą 2012-2014. Dla wszystkich spółek w okresie w próbie przeprowadzono estymację rozkładów najgorszego przypadku w procedurze przesuwanego okna

czasowego o długości 8 lat. Tabela 1 przedstawia wstępnie wybrane spółki należące do różnych sektorów i branż, dla których wartość oczekiwana rozkładu najgorszego przypadku była dodatnia.

**Tabela 1.** Spółki z dodatnią wartością oczekiwaną rozkładu najgorszego przypadku

| Firma               | Sektor   | Branża         |
|---------------------|----------|----------------|
| Grupa Apator S.A.   | Przemysł | Elektromaszyny |
| Getin Holding S.A.  | Finanse  | Banki          |
| MCI Management S.A. | Finanse  | Inne           |

W procedurze przesuwanego okna czasowego wyznaczono kopułę  $t$  najgorszego przypadku (maksymalną w porządku zależności stochastycznej). Badania empiryczne pokazują, że kopuła  $t$  najlepiej dopasowuje się do finansowych stóp zwrotu [zob. np. Fisher i in., 2007]. Kopuła  $t$  najgorszego przypadku jest definiowana przez macierz korelacji o maksymalnych wartościach [Müller i Stoyan, 2002] dla zadanej wartości stopni swobody. W procedurze estymacji kopuły otrzymano macierz korelacji

$$\mathbf{P} = \begin{bmatrix} 1 & 0,82 & 0,71 \\ 0,82 & 1 & 0,73 \\ 0,71 & 0,73 & 1 \end{bmatrix}.$$

Przyjęto najmniejszą wartość stopni swobody  $\nu = 1,5$  w celu uzyskania silnych zależności w ogonach rozkładu.

Zastosowano model optymalizacji portfela (4). Przyjęto  $\beta = 0,05$ ,  $\mu_0 = 0,001$  i  $x^g = 0,5$ . Przeprowadzono optymalizację dla 100 tys. jednakowo prawdopodobnych wektorów stóp zwrotu, wygenerowanych z 3-wymiarowego rozkładu zdefiniowanego przez kopułę  $t$  i rozkłady brzegowe najgorszego przypadku. Wykorzystano solver IBM ILOG CPLEX 12.6.1, optymalizacja trwała krócej niż 1 s na komputerze z procesorem 2.67 GHz i 4 GB pamięci RAM. Skład optymalnego portfela przedstawia tabela 2.

**Tabela 2.** Skład optymalnego portfela

| Firma               | Udział (%) |
|---------------------|------------|
| Grupa Apator S.A.   | 50,0       |
| Getin Holding S.A.  | 11,3       |
| MCI Management S.A. | 38,7       |

W celu wyznaczenia ilości inwestowanego kapitału w ryzykowne aktywa, która daje maksymalne tempo wzrostu inwestycji, wykorzystano kryterium Kelly'ego [Rotando i Thorp, 1992] w zastosowaniu do rozkładu najgorszego



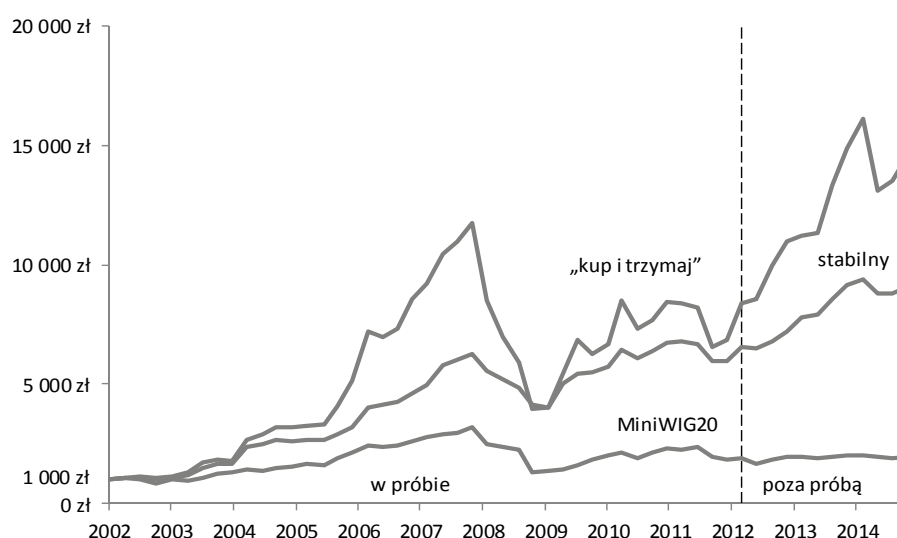
przypadku stóp zwrotu optymalnego portfela. Ilość ta wynosi 39,3%, pozostałą część należy inwestować w instrument wolny od ryzyka. Za instrument wolny od ryzyka przyjęto lokatę opartą na wskaźniku WIBOR 3M. Tak skonstruowany portfel będzie dalej nazywany stabilnym, jego skład przedstawia tabela 3.

**Tabela 3.** Skład stabilnego portfela

| Aktywo                              | Udział (%) |
|-------------------------------------|------------|
| Akcje firmy Grupa Apator S.A.       | 19,7       |
| Akcje firmy Getin Holding S.A.      | 4,4        |
| Akcje firmy MCI Management S.A.     | 15,2       |
| Lokata oparta na wskaźniku WIBOR 3M | 60,7       |

Portfel stabilny utrzymuje swe własności, jeżeli jego struktura nie zmienia się w czasie. Portfel został wyznaczony na podstawie kwartalnych stóp zwrotu, więc co kwartał powinien być rebalansowany w celu zachowania udziałów określonych w tabeli 3.

Rys. 1 przedstawia krzywe kapitału w próbie i poza próbą dla inwestycji w portfel stabilny, „kup i trzymaj” oraz jednostki indeksowe MiniWIG20, które w badanym okresie pozwalały inwestować w indeks WIG20.



**Rys. 1.** Krzywe kapitału

Krzywa kapitału portfela „kup i trzymaj” to wynik inwestycji portfela stabilnego bez rebalansowania co kwartał. Początkowa ilość inwestowanego kapitału wynosiła 1000 zł. Uzyskano następujące składanie średnioroczne stopy

wzrostu: portfel stabilny – 18,8%, portfel „kup i trzymaj” – 23,2%, jednostki indeksowe MiniWIG20 – 5,5%. Stopy wzrostu nie uwzględniają kosztów transakcyjnych, które są istotne w przypadku portfela stabilnego wymagającego rebalansowania.

Tabela 4 przedstawia statystyki dla okresu 2002-2014 dla kwartalnych stóp zwrotu porównywanych inwestycji. Statystyki dla rozkładu najgorszego przypadku (r.n.p.) stóp zwrotu portfela stabilnego są prezentowane dla okresu w próbie, VaR oznacza wartość zagrożoną (ang. *Value-at-Risk*). Wszystkie statystyki prezentowane w tabeli 4 są miarami zgodnymi z relacją FSD, tj. dla zmiennych losowych  $R_1$ ,  $R_2$  i miary  $\rho$  zachodzi  $R_1 \geq_{FSD} R_2 \Rightarrow \rho(R_1) \geq \rho(R_2)$ .

**Tabela 4.** Statystyki dla kwartalnych stóp zwrotu inwestycji

| Miara                            | Inwestycje       |                         |                     |
|----------------------------------|------------------|-------------------------|---------------------|
|                                  | Portfel stabilny | Portfel „kup i trzymaj” | Jednostki MiniWIG20 |
| Średnia (%)                      | 4,7              | 6,4                     | 2,0                 |
| Średnia, r.n.p. w próbie (%)     | 2,4              | –                       | –                   |
| Minimum (%)                      | -14,7            | -33,1                   | -42,9               |
| Minimum, r.n.p. w próbie (%)     | -15,6            | –                       | –                   |
| VaR (0,05) (%)                   | -10,6            | -20,0                   | -17,4               |
| VaR (0,05), r.n.p. w próbie (%)  | -12,5            | –                       | –                   |
| CVaR (0,05) (%)                  | -12,5            | -27,7                   | -29,1               |
| CVaR (0,05), r.n.p. w próbie (%) | -14,3            | –                       | –                   |

Z tabeli 4 wynika, że wszystkie analizowane statystyki rozkładu najgorszego przypadku portfela stabilnego utrzymały się w całym okresie inwestycji. Wartości statystyk portfela „kup i trzymaj” świadczą o konieczności rebalansowania w celu utrzymania charakterystyk rozkładu najgorszego przypadku uzyskanych w próbie. Za wyjątkiem średniej, wszystkie inne miary dały od 1,6 do 2,1 razy niższe wartości od tych uzyskanych dla rozkładu najgorszego przypadku. Z kolei wyniki inwestycji w jednostki indeksowe MiniWIG20 pokazują, że inwestowanie w portfel stabilny może dać atrakcyjniejsze zwroty i ryzyko od tych oferowanych przez portfel największych spółek. W tym przypadku dokładne porównanie wyników inwestycji wymaga uwzględnienia kosztów transakcyjnych.

## Podsumowanie

W pracy przedstawiono koncepcję rozkładu najgorszego przypadku stóp zwrotu aktywów finansowych, który wykorzystany w modelu Markowitza pozwala poza próbą otrzymać wyniki nie gorsze niż w próbie w sensie rozważanych wskaźników jakości. Rozkład najgorszego przypadku jest definiowany w oparciu

o relację dominacji stochastycznej pierwszego rzędu. Zaprezentowane podejście zakłada, że rozkłady w przyszłości nie będą gorsze od rozkładu najgorszego przypadku. W ogólności to założenie nie musi być spełnione, dlatego warto analizować rozkłady najgorszego przypadku w odniesieniu do silnych fundamentalnie spółek z długoterminowym potencjałem wzrostu.

Proponowane podejście zostało zilustrowane wynikami eksperymentów obliczeniowych dla wybranych akcji notowanych na Giełdzie Papierów Wartościowych w Warszawie. Z 80 spółek wyłoniono 3 należące do różnych sektorów i branż z rozkładami najgorszego przypadku o dodatniej wartości oczekiwanej. Niewielka liczba wybranych spółek jest wynikiem konserwatywnego charakteru metody – branie minimów z kwantyli dla odbiegających od siebie rozkładów z dodatnimi wartościami oczekiwanymi może prowadzić do rozkładu z ujemną wartością oczekiwaną. W ramach dalszych badań można rozważać inne, mniej restrykcyjne podejścia do określenia rozkładu stanowiącego ograniczenie z dołu procesu stochastycznego stóp zwrotu.

## Literatura

- Blackwell D. (1953), *Equivalent comparisons of experiments*, „Annals of Mathematical Statistics” 24, s. 265-272.
- Fischer M.J., Köck Ch., Schlüter S., Weigert F. (2007), *Multivariate copula models at work: Outperforming the desert island copula?*, discussion papers, Friedrich-Alexander-University Erlangen-Nuremberg, Chair of Statistics and Econometrics, No. 79/2007, <http://EconPapers.repec.org/RePEc:zbw:faucse:792007>.
- Hardy G.H., Littlewood J.E., Pólya G. (1934), *Inequalities*. Cambridge University Press, Cambridge, MA.
- Joe H. (1997), *Multivariate Models and Dependence Concepts*, Boca Raton: Chapman & Hall/CRC.
- Lehmann E.L. (1955), *Ordered families of distributions*, „Annals of Mathematical Statistics” 26, s. 399-419.
- Mann H.B., Whitney D.R. (1947), *On a test of whether one of two random variables is stochastically larger than the other*, „Annals of Mathematical Statistics” 18, s. 50-60.
- Mansini R., Ogryczak W., Speranza M.G. (2003), *LP solvable models for portfolio optimization: A classification and computational comparison*, „IMA Journal of Management Mathematics” 14, s. 187-220.
- Markowitz H.M. (1952), *Portfolio selection*, „Journal of Finance” 7, s. 77-91.
- Müller A., Stoyan, D. (2002), *Comparison Methods for Stochastic Models and Risks*. Wiley, Chichester.

- Ogryczak W., Śliwiński T. (2011), *On solving the dual for portfolio selection by optimizing Conditional Value at Risk*, „Computational Optimization and Applications” 50, s. 591-595.
- Pflug G.Ch. (2000), *Some remarks on the Value-at-Risk and the Conditional Value-at-Risk* [w:] S. Uryasev (red.), *Probabilistic Constrained Optimization: Methodology and Applications*, Kluwer A.P., Dordrecht.
- Rockafellar R.T., Uryasev S. (2000), *Optimization of Conditional Value-at-Risk*, „Journal of Risk” 2, s. 21-41.
- Rockafellar R.T., Uryasev S. (2002), *Conditional Value-at-Risk for general distributions*, „Journal of Banking and Finance” 26, s. 1443-1471.
- Rotando L.M., Thorp E.O. (1992), *The Kelly criterion and the stock market*, „The American Mathematical Monthly” 99, s. 922-931.

#### CONSTRUCTION OF A STABLE PORTFOLIO OF FINANCIAL INVESTMENTS BY MEANS OF THE WORST-CASE DISTRIBUTION

**Summary:** The basis of the portfolio selection is to determine the share of each financial asset. From a mathematical point of view, this issue boils down to portfolio optimization. This is a typical optimization problem solved by the Markowitz method, which maximizes the expected rate of return and minimizes risk defined as the variance. The assumptions of the Markowitz model should ensure that the optimal portfolios are stable over time, i.e., they should be characterized by the absence of fluctuations in their shares, or in other words, the risk and the expected return should correspond to those estimated from the historical data. In practice, these assumptions are not met. To solve this problem, we define a certain time-invariant distribution bounding portfolio time series of returns from below. This distribution is based on the relation of stochastic dominance and is called the worst-case distribution. We test the validity of this approach by conducting computational experiments on the real-life financial data from the Warsaw Stock Exchange.

**Keywords:** investment portfolio, optimization, stability.



**Tomasz Kuszewski**

Szkoła Główna Handlowa w Warszawie  
Kolegium Analiz Ekonomicznych  
Instytut Ekonometrii, Zakład Wspomagania  
i Analizy Decyzji  
tomasz.kuszewski@sgh.waw.pl

**Agata Sielska**

Instytut Ekonomiki Rolnictwa i Gospodarki  
Żywnościowej – PIB  
Zakład Zastosowań Matematyki  
w Ekonomice Rolnictwa  
Agata.Sielska@ierigz.waw.pl

## PROFILE PRODUKCYJNE PRODUCENTÓW ROLNYCH W REGIONACH FADN DLA POLSKI

**Streszczenie:** Celem pracy jest identyfikacja profili produkcyjnych producentów rolnych w zależności od regionu, wielkości gospodarstwa i typu działalności. Profil produkcyjny jest charakteryzowany przez oszacowane parametry funkcji CES w postaci zagnieżdżonej dla wyróżnionych czynników produkcji, takich jak: kapitał, praca i ziemia.

Podstawą analizy jest szacowanie funkcji produkcji dla wszystkich wariantów zagnieżdżeń czynników produkcji i wybór profilu produkcyjnego najlepiej dopasowanego do danych empirycznych. Badana jest dynamika profili produkcyjnych w latach 2004-2011 oraz podobieństwo efektów otrzymywanych z profili produkcyjnych o zróżnicowanej strukturze i substytucji czynników produkcji. Dane do badania pochodzą z bazy FADN (*Farm Accountancy Data Network*).

Stwierdzono, że w okresie 2004-2011 profile produkcyjne dla gospodarstw o różnej wielkości ekonomicznej oraz dla wyróżnionych typów działalności w poszczególnych regionach FADN, zmieniały się w sposób uniemożliwiający wskazanie reguł rządzących zmianami. Wskazano, że pomimo identyfikowania dla poszczególnych podzbiorów producentów rolnych różnych profili produkcyjnych, jest możliwy pomiar podobieństwa tych profili ze względu na efekt działalności. Skala podobieństwa profili jest większa w odniesieniu do typów działalności niż do wielkości ekonomicznej gospodarstw.

**Słowa kluczowe:** typ producenta rolnego, mikroekonomiczna funkcja produkcji, miara podobieństwa profilu produkcyjnego.

## Wprowadzenie

Producenci rolni<sup>1</sup>, zależnie od warunków naturalnych, spodziewanych warunków pogodowych, wielkości gospodarstwa rolnego oraz osobistych zainteresowań stosują różne strategie produkcyjne. Strategie takie nie są artykułowane przez konkretnych producentów, ale uwiadcniają się w profilu produkcji gospodarstwa rolnego i sposobie wykorzystywania czynników produkcji. Badanie indywidualnych wyborów producentów rolnych nie jest możliwe bez odpowiednich zbiorów danych, a bez koniecznego uogólnienia nie jest konstruktywne.

W niniejszej pracy podejmujemy zadanie identyfikacji przeciętnego profilu gospodarstwa rolnego. Zakładamy, że możliwym do obserwacji przejawem efektu decyzji produkcyjnych producenta rolnego jest zależność między nakładami czynników produkcji a efektem procesu produkcyjnego. W ekonomii taką zależność nazywamy funkcją produkcji. Uogólnieniem indywidualnych wyborów jest oszacowana funkcja produkcji dla zdefiniowanych, jednorodnych grup producentów rolnych. Zakładamy, że producenci rolni działający na danym obszarze i w danej wielkości gospodarstwie albo działający na danym obszarze i dla danej specjalizacji produkcyjnej podejmują decyzje, które są możliwe do modelowania, uśrednienia i interpretacji. Postać analityczna dopasowanej do danych funkcji produkcji oraz wartości parametrów wyznaczają tytułowy przeciętny profil produkcyjny. Wydaje się, że zarówno badanie zmienności profili produkcyjnych, jak i badanie ich podobieństwa dla określonych grup producentów pozwoli na poznanie wiodących strategii produkcyjnych co do struktury czynników produkcji i ich substytucji.

Stosownie do danych, którymi dysponujemy, badamy profile produkcyjne dynamicznie, tzn. w latach 2004-2011. Dane o indywidualnych producentach rolnych użyte w analizie pochodzą z bazy Farm Accountancy Data Network (FADN). W części pracy poświęconej wykorzystywanym danym zdefiniujemy również przyjęty podział producentów rolnych ze względu na region prowadzenia działalności produkcyjnej, ekonomiczną wielkość gospodarstwa oraz rodzaj działalności.

Szacowanie i interpretowanie funkcji produkcji producenta rolnego jest przedsięwzięciem stosowanym powszechnie w analizach sektora i ma bogatą literaturę. Sielska [2014] pokazała, że funkcja o stałej elastyczności substytucji czynników produkcji jest dobrze dopasowana do wymienionych danych, stąd

---

<sup>1</sup> Badamy producentów rolnych, ponieważ struktura czynników produkcji jest efektem ich decyzji produkcyjnych, możliwości finansowych i preferencji. Niekiedy zamiennie, zamiast o producencie, będziemy pisać o gospodarstwie rolnym, nie tracąc z pola widzenia aspektu decyzyjnego.

naszą analizę ograniczymy wyłącznie do tego typu funkcji produkcji. Szacowane postaci analityczne funkcji są jednak zróżnicowane, a to z powodu badania różnego rodzaju zagnieżdżeń w wieloczynnikowej funkcji produkcji. Opis postaci funkcji oraz dyskusja sposobu interpretacji parametrów jest zawarta w części pracy poświęconej przedstawieniu stosowanych w pracy narzędzi analitycznych. W tej części pracy podajemy również najistotniejsze informacje o wybranej metodzie szacowania parametrów funkcji produkcji.

Dwie różne ze względu na rodzaje zagnieżdżeń czynników produkcji i wartości oszacowanych parametrów funkcje produkcji mogą nie różnić się ze względu na efekt procesu produkcyjnego. Do porównania tego aspektu profilu produkcyjnego stosujemy miarę podobieństwa funkcji zaproponowaną przez Dorosiewicza i Michalskiego [1998].

Główna część opracowania jest poświęcona prezentacji wyników analizy przeciętnych profili produkcyjnych. Ponieważ w tak krótkim opracowaniu nie jest możliwe pokazanie wszystkich wyników obliczeń koncentrujemy się na następujących zagadnieniach:

- zmienność bądź konwergencja profili produkcyjnych w czasie,
- zmienność bądź konwergencja profili produkcyjnych w przestrzeni.

W podsumowaniu, oprócz syntezy wyników analizy, staramy się nakreślić kierunki przyszłych badań zróżnicowania profili produkcyjnych producentów rolnych.

## 1. Dyskryminacja zbioru producentów rolnych

W tej części pracy przedstawimy podstawowe cechy informacji gromadzonych w bazie FADN, okres analizy oraz zdefiniujemy badane grupy producentów.

### 1.1. FADN

FADN (*Farm Accountancy Data Network*) stanowi system zbierania i wykorzystywania danych rachunkowych z gospodarstw rolnych. FADN, którego historia datuje się od 1965 r., funkcjonuje w każdym kraju członkowskim UE, a zbierane dane są reprezentatywne dla typu rolniczego, wielkości ekonomicznej oraz położenia gospodarstwa rolnego.

Do analizy wybrano następujące zmienne reprezentujące czynniki wytwórcze dla lat 2004-2011:

- praca (L) – czas pracy ogółem (suma czasu pracy świadczonej w gospodarstwie nieodpłatnie, głównie przez członków rodziny oraz czasu pracy najemnej, wyrażona w godzinach),
- ziemia (Z) – całkowita powierzchnia użytków rolnych (z wyłączeniem m.in. ziemi dzierżawionej na okres krótszy niż jeden rok, wyrażona w hektarach),

- kapitał (K) – nakłady kapitału odzwierciedlane przez wartość aktywów ogółem (suma aktywów trwałych i obrotowych, wyrażona w zł).

Produkcja (Y) reprezentowana jest przez wartość produkcji ogółem, będącą sumą produkcji roślinnej, zwierzęcej oraz pozostałej (w zł).

Każdy z krajów członkowskich jest podzielony na regiony, przy czym niektóre państwa traktowane są jako jeden region (np. Cypr, Dania). W Polsce wyróżnia się następujące cztery regiony, obejmujące województwa: Pomorze i Mazury – woj. lubuskie, pomorskie, warmińsko-mazurskie i zachodniopomorskie, Wielkopolska i Śląsk – woj. dolnośląskie, kujawsko-pomorskie, opolskie oraz wielkopolskie, Mazowsze i Podlasie – woj. lubelskie, łódzkie, mazowieckie i podlaskie oraz Małopolska i Pogórze – woj. małopolskie, podkarpackie, śląskie i świętokrzyskie.

## 1.2. Producenci ze względu na wielkość ekonomiczną

Wielkość ekonomiczną gospodarstwa rolnego wyznacza się na podstawie wartości parametru Standardowej Produkcji (*Standard Output, SO*). W celu wyznaczenia SO oblicza się wartość uzyskiwanej w ciągu roku produkcji określonego typu z jednego hektara lub jednego zwierzęcia. W tym procesie wykorzystywane są średnie z pięciu lat, co ma służyć wyeliminowaniu wahań sezonowych [Płonka i in., 2015; Bocian, Cholewa i Tarasiuk, 2014].

W pracy wykorzystaliśmy grupowanie według klasyfikacji ES6, w której gospodarstwa zaliczane są do jednej z sześciu klas zgodnie z wartościami Standardowej Produkcji przedstawionymi w tabeli 1. Ze względu na niedostateczną liczebność gospodarstw należących do niektórych grup w wybranych latach i regionach, z próby wyłączono klasy „bardzo małe” i „bardzo duże”.

**Tabela 1.** Klasy wielkości ekonomicznej i liczba obserwacji w badaniu

| Klasa wielkości ekonomicznej ES6 \ Rok                 | 2004 | 2005 | 2006 | 2007 | 2008 | 2009 | 2010 | 2011 |
|--------------------------------------------------------|------|------|------|------|------|------|------|------|
| Bardzo małe<br>( $2000 \leq \text{€} < 8000$ )         | -    | -    | -    | -    | -    | -    | -    | -    |
| Małe ( $8000 \leq \text{€} < 25\,000$ )                | 4672 | 4827 | 4731 | 4191 | 4155 | 4105 | 4272 | 3898 |
| Średnio małe<br>( $25\,000 \leq \text{€} < 50\,000$ )  | 3106 | 3199 | 3279 | 2647 | 2666 | 2673 | 3104 | 2830 |
| Średnio duże<br>( $50\,000 \leq \text{€} < 100\,000$ ) | 1547 | 1682 | 1755 | 1318 | 1344 | 1441 | 1752 | 1602 |
| Duże<br>( $100\,000 \leq \text{€} < 500\,000$ )        | 594  | 696  | 768  | 552  | 554  | 560  | 832  | 633  |
| Bardzo duże ( $\text{€} \geq 500\,000$ )               | -    | -    | -    | -    | -    | -    | -    | -    |

Źródło: Klasy wielkości ekonomicznej za: Bocian, Cholewa, Tarasiuk [2014, s. 42], opracowanie własne na podstawie danych FADN.



### 1.3. Producenci ze względu na rodzaj działalności

Wartość Standardowej Produkcji jest również wykorzystywana do określenia rodzaju działalności gospodarstwa, tzw. typu rolniczego. Kryterium, na podstawie którego klasyfikowane są gospodarstwa, jest wielkość udziału standardowej produkcji danego rodzaju w całkowitej wartości produkcji.

W pracy skorzystaliśmy z klasyfikacji TF8, zgodnie z którą gospodarstwo przyporządkowane jest do jednej z ośmiu specjalizacji: uprawy polowe; uprawy ogrodnicze; winnice; uprawy trwałe; krowy mleczne; zwierzęta trawożerne; zwierzęta ziarnożerne oraz produkcja mieszana [Płonka i in., 2015; Bocian, Cholewa i Tarasiuk, 2014]. Podobnie jak w przypadku wielkości ekonomicznej, z powodu niedostatecznej liczebności producentów należących do niektórych grup w wybranych latach i regionach, analizowaliśmy jedynie cztery typy produkcyjne. Odpowiednie liczebności podano w tabeli 2.

**Tabela 2.** Liczba obserwacji wg rodzaju działalności

| Rok \ Typ             | 2004 | 2005 | 2006 | 2007 | 2008 | 2009 | 2010 | 2011 |
|-----------------------|------|------|------|------|------|------|------|------|
| Uprawy polowe         | 1405 | 1610 | 1676 | 1453 | 1698 | 1699 | 2045 | 1921 |
| Krowy mleczne         | 1969 | 2167 | 2183 | 1976 | 2100 | 2094 | 2319 | 2092 |
| Zwierzęta ziarnożerne | 1634 | 1812 | 1955 | 1481 | 1266 | 1377 | 1600 | 1347 |
| Mieszane              | 5185 | 5214 | 4944 | 4010 | 3819 | 3605 | 3855 | 3446 |

Źródło: Opracowanie własne na podstawie danych FADN.

## 2. Narzędzia analizy profili produkcyjnych

Niniejsza część pracy jest poświęcona zaprezentowaniu narzędzi analizy profili produkcyjnych. Szczególną uwagę zwracamy na wybraną funkcję produkcji, metodę szacowania jej parametrów oraz sposób pomiaru podobieństwa wieloczynnikowych funkcji produkcji. Czynniki produkcji w funkcji produkcji producenta rolnego, brany pod uwagę w naszej analizie, są, jak zdefiniowano w poprzedniej części opracowania, kapitał (K), ziemia (Z) oraz praca (L).

### 2.1. Funkcja produkcji o stałej elastyczności substytucji czynników

Cobb i Douglas [1928] jako pierwsi zaproponowali do analizy procesu produkcyjnego pewną funkcję, znaną i powszechnie używaną do dzisiaj. W oryginalnym sformułowaniu jest to funkcja odwzorowująca wpływ dwóch czynników produkcji na wielkość produkcji. Funkcja Cobb-Douglasa jest jednorodną funkcją

o stałych elastycznościach produktu względem czynników produkcji, a elastyczność substytucji<sup>2</sup> jest stała i równa  $\sigma = 1$ .

Arrow, Chenery, Minhas i Solow [1961] uogólnili funkcję Cobb-Douglasa i wyprowadzili dwuczynnikową funkcję produkcji, zwaną dzisiaj potocznie<sup>3</sup> funkcją CES (*Constant Elasticity of Substitution*) postaci

$$Y = \gamma[\delta K^{-\rho} + (1 - \delta)L^{-\rho}]^{-\frac{\nu}{\rho}},$$

gdzie  $Y$  – produkt,  $K, L$  – czynniki produkcji,  $\gamma > 0$  – parametr skali produkcji,  $0 < \delta < 1$  – parametr struktury czynników produkcji,  $\nu > 0$  – parametr przechodów skali, wyznaczający stopień jednorodności funkcji,  $\rho > -1, \rho \neq 0$  – parametr substytucji czynników produkcji. Funkcja Arrowa i in. (ACMS) jest uogólnieniem kilku funkcji produkcji<sup>4</sup>.

Nic nie stoi na przeszkodzie, aby rozpatrywać więcej niż dwa czynniki produkcji. Takie uogólnienie funkcji ACMS podaje Uzawa [1962] oraz McFadden [1963]. Sielska [2014] pokazuje, że dla modelowania zachowań producentów rolnych na podstawie danych indywidualnych dobrze dopasowane statystycznie są uogólnienia funkcji ACMS odmienne od uogólnienia Uzawy. W sformułowanym modelu rozpatruje się co prawda trzy czynniki produkcji, ale funkcja produkcji jest funkcją  $R^2 \rightarrow R^1$ . Zabieg, który sprowadza zależność trójczynnikową do dwuczynnikowej, nosi w literaturze nazwę zagnieżdżenia dwupoziomowego [Sato, 1967]. Pomysł Sato jest często wykorzystywany [Kemfert<sup>5</sup>, 1998; Caselli i Coleman, 2002]. Testujemy trzy możliwe warianty zagnieżdżeń:

$$(\text{wariant LZK}) Y = \gamma \left[ \delta(\delta_1 L^{-\rho_1} + (1 - \delta_1) Z^{-\rho_1})^{-\frac{\rho}{\rho_1}} + (1 - \delta) K^{-\rho} \right]^{-\frac{\nu}{\rho}},$$

$$(\text{wariant ZKL}) Y = \gamma \left[ \delta(\delta_1 Z^{-\rho_1} + (1 - \delta_1) K^{-\rho_1})^{-\frac{\rho}{\rho_1}} + (1 - \delta) L^{-\rho} \right]^{-\frac{\nu}{\rho}},$$

<sup>2</sup> Elastyczność substytucji mierzy wpływ jednostkowej względnej zmiany krańcowej stopy technicznej substytucji jednego czynnika przez drugi (np. pracy przez kapitał) na odwrotność współczynnika technicznego uzbrojenia pracy. W przypadku funkcji Cobb-Douglasa krańcowa stopa technicznej substytucji pracy przez kapitał jest liniową funkcją technicznego uzbrojenia pracy. W interpretacji geometrycznej elastyczność substytucji mierzy stopień krzywizny (wypukłości) izokwanty funkcji produkcji.

<sup>3</sup> Ta nazwa nie identyfikuje jednoznacznie funkcji produkcji, ponieważ oprócz ACMS jest znanych i stosowanych w badaniach wiele funkcji o stałej elastyczności substytucji.

<sup>4</sup> Można udowodnić [Żółtowska, 1997], że dla  $\rho \rightarrow 0$  funkcja Arrowa i in. zbiega do funkcji Cobb-Douglasa, dla  $\rho \rightarrow -1$  – zbiega do liniowej funkcji produkcji i  $\sigma \rightarrow \infty$ , zaś dla  $\rho \rightarrow \infty$  – zbiega do Leontiewa funkcji produkcji i  $\sigma = 0$ .

<sup>5</sup> W pracy Kemfert funkcje produkcji są zdynamizowane przez uwzględnienie czynnika postaci  $\exp(\lambda t)$ , gdzie  $\lambda$  jest parametrem, a  $t$  zmienną odwzorowującą upływ czasu.

$$(\text{wariant KLZ}) Y = \gamma \left[ \delta (\delta_1 K^{-\rho_1} + (1 - \delta_1) L^{-\rho_1})^{-\frac{\rho}{\rho_1}} + (1 - \delta) Z^{-\rho} \right]^{-\frac{\nu}{\rho}}.$$

W wariancie LZK kapitał jest traktowany jako jeden z dwóch podstawowych czynników produkcji, wymienny z drugim czynnikiem, który jest zagnieżdżoną funkcją pracy i ziemi. Oznacza to bezpośrednią substytucję między pracą a ziemią. Należy stwierdzić, że kapitał występuje na pierwszym poziomie zagnieżdżenia, a praca i ziemia – na drugim. Analogicznie można zinterpretować postaci analityczne wariantów ZKL oraz KLZ. Zagnieżdżanie umożliwia utrzymanie stałej elastyczności substytucji między agregatem a wyróżnionym czynnikiem produkcji. Warto zauważyć, że propozycja szacowania zagnieżdżonych funkcji produkcji nie zmniejsza ogólności rozważań. Otrzymanie wartości oszacowań parametrów  $\rho = \rho_1$  będzie wskazywać na konieczność interpretacji niezagnieżdżonej funkcji produkcji.

Można oczekiwać, że w trakcie szacowania parametrów zagnieżdżonej funkcji produkcji w każdej grupie producentów rolnych, ujawniać się będą jako najlepiej dopasowane w danym roku inne jej warianty. To zjawisko można interpretować jako zmianę przeciętnego profilu produkcyjnego danej grupy producentów. Na tym etapie badań nad profilami produkcyjnymi nie dyskutuje się o innych szczegółowych zagadnieniach związanych z funkcjami produkcji o stałej elastyczności substytucji, np. różnicach w interpretacji elastyczności Allena/Uzawy czy Morishimy [Blackorby i Russell, 1989].

## 2.2. Szacowanie parametrów mikroekonomicznej funkcji produkcji

Szacowanie parametrów funkcji produkcji postaci ACMS jest przedsięwzięciem niebanalnym z ekonometrycznego punktu widzenia. Mamy do czynienia z modelem ściśle nieliniowym względem parametrów. Do szacowania wartości parametrów takiego modelu<sup>6</sup> na podstawie danych używa się zazwyczaj nieliniowej metody najmniejszych kwadratów (NMNK) lub metody największej wiarygodności. Gdy stosuje się pierwszą z wymienionych metod, poszukuje się takich wartości parametrów modelu, które minimalizują sumę kwadratów reszt. Jak widać, idea jest identyczna z podejściem do modeli liniowych względem parametrów, ale jej implementacja w przypadku modeli nieliniowych jest nieporównanie trudniejsza numerycznie, ponieważ sprowadza się do poszukiwania

<sup>6</sup> Szacowanie parametrów nie jest jedyną drogą do nadania parametrom wartości liczbowych. Innym sposobem jest tzw. kalibracja, mająca zastosowanie częściej w pracach makroekonomicznych niż mikroekonomicznych [Growiec, 2012].

rozwiązania najkorzystniejszego zadania optymalizacji nieliniowej. W przypadku relacjonowanego badania trudność optymalizacji jest zwiększona na skutek wykorzystywania danych mikroekonomicznych.

Znane i stosowane są liczne procedury numeryczne poszukiwania minimum funkcji wielu zmiennych. Sielska [2014] porównuje skuteczność szacowania parametrów zagnieżdżonej funkcji ACMS metodami: Levenberga-Marqudta, gradientu sprzężonego, Newtona, Broydena-Fletcher-Goldfarba-Shanno (BFGS), BFGS z ograniczoną pamięcią, PORT, Nelder-Meada, symulowanego wyżarzania (*Simulated Annealing*) oraz ewolucji różnicowej (*Differential Evolution*). Z cytowanego badania wynika, że metoda ewolucji różnicowej jest stabilna numerycznie i dobrze sprawdza się w przypadku danych indywidualnych. Ponadto, zgodnie z [Mishra, 2007] (za: [Henningsen, Henningsen, 2014]) można stwierdzić, że uznaje się ją za bardziej efektywną od innych, zbliżonych metod, np. symulowanego wyżarzania. Uzyskane za jej pomocą modele są interpretowane jako funkcje o stałej elastyczności substytucji.

Metoda DE należy do metod obliczeniowych sztucznej inteligencji<sup>7</sup>. Od czasu powstania [Storn i Price, 1997] jest intensywnie rozwijana [Price, Storn i Lampinen, 2005] oraz są ujawniane jej liczne skuteczne zastosowania [Feokistov, 2006]. DE jest metodą przeznaczoną do poszukiwania punktu wartości minimalnej funkcji ciągłej wielu zmiennych. Jako procedura optymalizacji globalnej gwarantuje uniknięcie zatrzymania procesu minimalizacji wartości funkcji w optimum lokalnym, co czyni jej zastosowanie w rozważanej sytuacji szacowania parametrów funkcji produkcji na podstawie danych indywidualnych tym bardziej uzasadnionym.

Obliczenia, których rezultaty są podstawą analizy przeprowadzonej w tym opracowaniu, wykonano w pakiecie ‘micEconCES’, będącym składowym oprogramowania *open source* R.

### 2.3. Miara podobieństwa profili produkcyjnych

Badanie profili producentów rolnych jest dokonywane według różnych kryteriów i według zróżnicowanej metodyki. Jak wspomnieliśmy w poprzedniej części pracy, jednym z możliwych sposobów analizy jest krytyczna interpretacja oszacowań funkcji produkcji. Drugim sposobem porównania profili produkcyj-

<sup>7</sup> Wydaje się, że nie ma potrzeby rozwijania tematu podziału metod numerycznych, nazywanych potocznie metodami sztucznej inteligencji. Dyskusje, czy dana procedura jest algorytmem genetycznym, czy algorytmem ewolucyjnym, są przedmiotem zainteresowania innej dyscypliny naukowej [Michalewicz i Fogel, 2006].

nych, dającym obraz bardziej syntetyczny od poprzedniego, jest zbadanie całosciowego podobieństwa oszacowanych funkcji produkcji definiujących profile produkcyjne. Narzędziem, które zastosujemy, jest miara podobieństwa funkcji zaproponowana przez Dorosiewicza i Michalskiego [1998]. Podstawą konstrukcji miary jest intuicja badania wartości cosinusa kąta zawartego między stycznymi do wykresów porównywanych funkcji przy jednoczesnym wzięciu po uwagę różnic monotoniczności w danym punkcie. Miara jest unormowana i przyjmuje wartości z przedziału  $<-1,1>$  oraz jest symetryczna i zwrotna, tzn. funkcja  $f$  jest podobna do siebie samej i miara podobieństwa jest wtedy równa 1. Aby nie epatować Czytelnika skomplikowanym wywodem, przytoczymy za twórcami miary kilka wzorów, które dają jasny obraz zasad jej konstrukcji. Niech:  $f, g: R^1 \rightarrow R^1$  – funkcje różniczkowalne. Wartość miary podobieństwa  $S$  w punkcie  $x$  jest określona następująco:

$$S(f, g)(x) = \frac{|1+f'(x) \cdot g'(x)|}{\sqrt{(1+[f'(x)]^2)(1+[g'(x)]^2)}} \cdot \Theta[f'(x) \cdot g'(x)],$$

gdzie  $\Theta(a) = \text{sign}[2\text{sign}(a) + 1]$ .

Wartość miary podobieństwa dwóch funkcji na przedziale liczbowym  $[a, b]$  jest równa

$$S_{[a,b]}(f, g) = \lim_{\beta \rightarrow b^-, \alpha \rightarrow a^+} \frac{1}{\beta - \alpha} \int_{\alpha}^{\beta} S(f, g)(x) dx.$$

Naturalnym uogólnieniem jest także określenie wartości miary na dowolnym zbiorze  $X \subset R^1$ . Gdy  $\vartheta$  jest nieujemną i ograniczoną miarą na pewnej  $\sigma$ -algebrze  $\mathcal{M}$  podzbiorów zbioru  $X$ , wtedy

$$S_X(f, g) = \frac{1}{\vartheta(X)} \int_X S(f, g)(x) d\vartheta(X).$$

W przypadku referowanego badania istnieje potrzeba badania podobieństwa funkcji wielu zmiennych. Załóżmy, że:  $f, g: R^n \rightarrow R^1$  – funkcje różniczkowalne oraz  $x = (x_1, x_2, \dots, x_n)$ . Wartość miary podobieństwa funkcji w punkcie jest teraz określona następująco:

$$S(f, g)(x) = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \frac{\left| 1 + \frac{\partial f}{\partial x_i}(x) \cdot \frac{\partial g}{\partial x_i}(x) \right|}{\sqrt{\left[ 1 + \left( \frac{\partial f}{\partial x_i}(x) \right)^2 \right] \left[ 1 + \left( \frac{\partial g}{\partial x_i}(x) \right)^2 \right]}} \cdot \Theta \left( \frac{\partial f}{\partial x_i}(x) \cdot \frac{\partial g}{\partial x_i}(x) \right).$$

Uogólnienie na przedział i podzbiór przestrzeni  $R^n$  przebiega analogicznie jak w przypadku przestrzeni  $R^1$ . Widać, że efektywne obliczenie wartości miary w przypadku rozpatrywanych funkcji produkcji wymaga całkowania na pod-

zbiorach przestrzeni  $R^2$  będących prostokątami, których współrzędne określa zakres zmienności czynników produkcji dla rozpatrywanej grupy producentów rolnych. Obliczenia wykonano w pakietach *open source* Maxima i R.

### 3. Wyniki analizy

Oszacowano parametry funkcji produkcji omówionych w punkcie 2.1 w trzech wariantach LZK, ZKL oraz KLZ dla Polski ogółem, każdego z 4 regionów FADN i każdego wyróżnionego typu produkcyjnego a także dla każdego z 4 regionów i 3 klas wielkości gospodarstw: „małe”, „średnio małe” oraz „średnio duże”. Dla producentów rolnych z klasy wielkości „duże” oszacowano, ze względu na wielkość próby, tylko model dla Polski ogółem. Funkcję produkcji ze względu na wariant zagnieżdżenia czynników produkcji traktujemy jako uśredniony profil producenta rolnego w zadanej dyskryminacji. Analizujemy profile produkcyjne ze względu na zmiany w rodzajach zagnieżdżenia w latach 2004-2011 oraz ze względu na podobieństwo pod względem dopasowania do danych empirycznych i skutków produkcyjnych. Dopasowanie do danych empirycznych oceniamy na podstawie wartości współczynników determinacji. Okazuje się, że oszacowane profile produkcyjne dla podziału według typu działalności producenta są znacznie lepiej dopasowane do danych empirycznych niż profile produkcyjne wyróżnione ze względu na wielkość ekonomiczną tego producenta. Zanim przejdziemy do syntetyzowania wyników obliczeń zinterpretujemy oszacowania dwóch przykładowych profili produkcyjnych.

#### 3.1. Profile produkcyjne produkcji mieszanej w Małopolsce i na Pogórzu

Z wielu oszacowanych modeli funkcji produkcji wybraliśmy dwie jako przykład zmian profili produkcyjnych w danym regionie FADN oraz dla danego typu producentów rolnych (tabela 3). Miarą dopasowania profili do danych empirycznych jest współczynnik determinacji  $R^2$ . Co prawda w przypadku modeli nieliniowych, wartości przyjmowane przez ten współczynnik mogą wybiegać poza przedział  $<0, 1>$ , ale jak pisze Greene [2000, s. 420], mimo tej niedogodności, współczynnik determinacji jest nadal dobrą miarą dopasowania nieliniowego modelu ekonometrycznego do danych.

**Tabela 3.** Profile produkcyjne producentów rolnych w regionie Małopolska i Pogórze dla produkcji mieszanej w latach 2004 i 2011

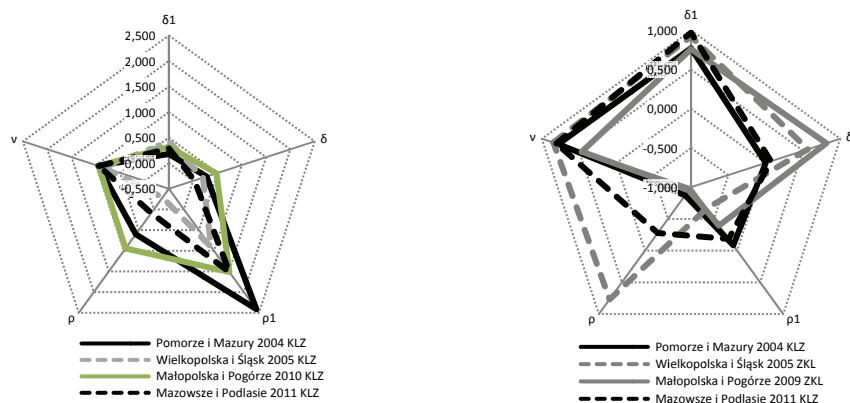
| Parametr                                                        | 2004    | 2011     |
|-----------------------------------------------------------------|---------|----------|
| Wariant zagnieżdżenia                                           | LZK     | ZKL      |
| Skala produkcji ( $\gamma$ )                                    | 371,433 | 2132,258 |
| Struktura czynników na I poziomie zagnieżdżenia ( $\delta$ )    | 0,908   | 0,946    |
| Struktura czynników na II poziomie zagnieżdżenia ( $\delta_1$ ) | 0,601   | 0,468    |
| Substytucja na I poziomie zagnieżdżenia ( $\rho$ )              | -0,245  | -0,094   |
| Substytucja na II poziomie zagnieżdżenia ( $\rho_1$ )           | 7,759   | 5,441    |
| Przychody skali ( $\nu$ )                                       | 0,999   | 1,122    |
| Współczynnik determinacji                                       | 0,781   | 0,854    |

Źródło: Opracowanie własne na podstawie danych FADN.

Dopasowanie obu profili produkcyjnych do danych empirycznych jest zadowalające. W 2004 r. czynnikiem produkcji na I stopniu zagnieżdżenia był kapitał (K), natomiast praca (L) występowała wspólnie z ziemią (Z) na II stopniu zagnieżdżenia. Czynniki łączny wypełniał około 90%, a kapitał około 10% w strukturze czynników produkcji. Na II stopniu zagnieżdżenia praca miała około 60% udziału w czynniku łącznym, a ziemia około 40%. W 2011 r. – końcowym roku badanego okresu – czynnikiem łącznym było połączenie ziemi i kapitału, natomiast praca stanowiła już czynnik odrębny, ale z udziałem tylko około 5% w strukturze czynników produkcji. Czynniki łączny (ziemia i kapitał) wyczerpywały pozostałe 95%, i ich udziały były zbliżone, z lekką przewagą kapitału. W 2004 r. gospodarowano w realiach stałych przychodów skali, co oznacza, że równomierne zwiększanie zaangażowania czynników produkcji pozwalało na podobne zwiększenie efektów. W 2011 r. sytuacja dla gospodarujących w typie mieszanym produkcji rolnej była korzystniejsza. Równomierne zwiększanie zaangażowania czynników produkcji dawało wzrost produkcji o około 12% większy niż tempo wzrostu zaangażowania czynników. W 2004 r. praca była bezpośrednim substytutem ziemi z małą elastycznością substytucji, podobnie mała elastyczność substytucji miała miejsce w przypadku ziemi i kapitału – bezpośrednich substytutów w 2011 r. W obu porównywanych latach elastyczność substytucji na I stopniu zagnieżdżenia była zbliżona do jedności. Oznacza to podobną co do wartości elastyczność substytucji między czynnikiem łącznym pracą i ziemią a kapitałem w 2004 r. oraz ziemią i kapitałem a pracą w 2011 r.

Z przeprowadzonego porównania możemy wyciągnąć wniosek, że w okresie 2004-2011 rola pracy jako czynnika produkcji w rozpatrywanej grupie producentów rolnych zmalała, a rola kapitału wzrosła. Jednocześnie opłacalne stało się zwiększanie zaangażowania wszystkich czynników produkcji z powodu rosnących efektów skali.

W podanym przykładzie profili produkcyjnych, poza odmiennością zagnieźdzeń i struktury zaangażowania czynników produkcji, wartości parametrów nie cechowała duża zmienność. W przypadkach innych grup producentów rolnych była ona znacząca. Wybrane oszacowane profile produkcyjne ilustruje rys. 1. Dla utrzymania jego przejrzystości zrezygnowano z uwzględnienia wartości parametru skali produkcji.



**Rys. 1.** Zmienność parametrów wybranych profili produkcyjnych: uprawy polowe – część lewa, zwierzęta ziarnożerne – część prawa

Źródło: Opracowanie własne na podstawie danych FADN.

W przypadku typu „uprawy polowe” (lewa część rysunku) dane pochodzą z różnych lat dla tego samego wariantu zagnieźdzeń czynników produkcji. Parametrem profili o największej zmienności jest parametr określający elastyczność substytucji czynników w zagnieźdzeniu. Parametrem o najmniejszej zmienności jest parametr przychodów skali. W przypadku typu „zwierzęta ziarnożerne” (prawa część rysunku) dane pochodzą z różnych lat i dotyczą innych wariantów zagnieźdzeń. Względnie stały jest tylko parametr struktury czynników produkcji w zagnieźdzeniu.

### 3.2. Zmiany profili produkcyjnych w czasie i przestrzeni

Przedstawimy teraz wyniki badania zmian profili produkcyjnych producentów rolnych dla całego okresu 2004-2011. Dla każdej wyróżnionej grupy producentów rolnych ocenialiśmy dopasowanie trzech wariantów profilu produkcyjnego, zróżnicowanych ze względu na sposób zagnieźdzania czynników produkcji. Każdorazowo, spośród trzech wariantów wybieraliśmy najlepiej dopasowany do danych zgodnie z wartością współczynnika determinacji. Rezultaty porównań zawierają tabele 4 i 5.



**Tabela 4.** Profile produkcyjne producentów rolnych w Polsce i regionach według klasy wielkości producentów rolnych w latach 2004-2011

| Regiony              | 2004 | 2005 | 2006 | 2007 | 2008 | 2009 | 2010 | 2011 |
|----------------------|------|------|------|------|------|------|------|------|
| Małe                 |      |      |      |      |      |      |      |      |
| POLSKA               | ZKL  | LZK  | KLZ  | LZK  | LZK  | KLZ  | LZK  | ZKL  |
| Pomorze i Mazury     | LZK  | ZKL  | LZK  | LZK  | ZKL  | LZK  | KLZ  | ZKL  |
| Wielkopolska i Śląsk | LZK  | KLZ  | KLZ  | KLZ  | ZKL  | KLZ  | ZKL  | ZKL  |
| Mazowsze i Podlasie  | LZK  | ZKL  | LZK  | LZK  | ZKL  | KLZ  | KLZ  | LZK  |
| Małopolska i Pogórze | KLZ  | ZKL  | ZKL  | ZKL  | LZK  | ZKL  | KLZ  | KLZ  |
| Średnio małe         |      |      |      |      |      |      |      |      |
| POLSKA               | ZKL  | LZK  | LZK  | KLZ  | ZKL  | LZK  | KLZ  | LZK  |
| Pomorze i Mazury     | LZK  | ZKL  | LZK  | ZKL  | LZK  | KLZ  | LZK  | LZK  |
| Wielkopolska i Śląsk | LZK  | ZKL  | ZKL  | ZKL  | KLZ  | KLZ  | ZKL  | ZKL  |
| Mazowsze i Podlasie  | LZK  | LZK  | LZK  | LZK  | KLZ  | ZKL  | ZKL  | ZKL  |
| Małopolska i Pogórze | LZK  | KLZ  | ZKL  | LZK  | LZK  | KLZ  | LZK  | ZKL  |
| Średnio duże         |      |      |      |      |      |      |      |      |
| POLSKA               | ZKL  | ZKL  | LZK  | ZKL  | ZKL  | ZKL  | KLZ  | ZKL  |
| Pomorze i Mazury     | ZKL  | LZK  | LZK  | ZKL  | LZK  | LZK  | LZK  | ZKL  |
| Wielkopolska i Śląsk | LZK  | ZKL  | ZKL  | ZKL  | KLZ  | LZK  | LZK  | ZKL  |
| Mazowsze i Podlasie  | LZK  | ZKL  | ZKL  | LZK  | LZK  | KLZ  | ZKL  | KLZ  |
| Małopolska i Pogórze | LZK  | ZKL  | LZK  | LZK  | ZKL  | LZK  | LZK  | LZK  |

Źródło: Opracowanie własne na podstawie danych FADN.

W zmienności profili produkcyjnych trudno dostrzec prawidłowości zmian w czasie. Reguły wyboru w regionach w zależności od wielkości ekonomicznej są łatwiejsze do ustalenia. W przypadku producentów małych każdy z trzech wariantów profili produkcyjnych jest identyfikowany w latach 2004-2011 tak samo często. W przypadku producentów średnio małych i średnio dużych liczba wyborów wariantu ZKL jest taka sama, jak w przypadku producentów małych, a liczba wyborów wariantu LZK wzrasta kosztem liczby wyborów wariantu KLZ. Oznacza to, że im większy producent rolny, tym ważniejsza staje się bezpośrednia substytucja między kapitałem a innymi czynnikami produkcji.

Trudność w rozpoznaniu prawidłowości w czasie zmian profili produkcyjnych może wynikać ze zbyt małej liczby obserwacji zmienności warunków gospodarowania w zależności od wielkości producenta oraz zmian wynikających z przystosowania się producentów do uwarunkowań powstałych po wstąpieniu Polski do Unii Europejskiej.

Porównamy teraz zmienność profili produkcyjnych ze względu na typ działalności producenta rolnego. Odpowiednie dane zawiera tabela 5.

**Tabela 5.** Profile produkcyjne producentów rolnych w Polsce i regionach według typu działalności producentów rolnych w latach 2004-2011

| Regiony                      | 2004 | 2005 | 2006 | 2007 | 2008 | 2009 | 2010 | 2011 |
|------------------------------|------|------|------|------|------|------|------|------|
| <b>Uprawy polowe</b>         |      |      |      |      |      |      |      |      |
| POLSKA                       | LZK  | LZK  | LZK  | ZKL  | ZKL  | ZKL  | KLZ  | LZK  |
| Pomorze i Mazury             | ZKL  | ZKL  | KLZ  | KLZ  | ZKL  | ZKL  | ZKL  | KLZ  |
| Wielkopolska i Śląsk         | LZK  | LZK  | LZK  | LZK  | ZKL  | KLZ  | KLZ  | ZKL  |
| Mazowsze i Podlasie          | ZKL  | ZKL  | ZKL  | ZKL  | ZKL  | ZKL  | KLZ  | LZK  |
| Małopolska i Pogórze         | LZK  | KLZ  | KLZ  | LZK  | ZKL  | ZKL  | KLZ  | ZKL  |
| <b>Krowy mleczne</b>         |      |      |      |      |      |      |      |      |
| POLSKA                       | LZK  | LZK  | LZK  | LZK  | LZK  | LZK  | KLZ  | ZKL  |
| Pomorze i Mazury             | ZKL  | LZK  | KLZ  | ZKL  | ZKL  | ZKL  | LZK  | ZKL  |
| Wielkopolska i Śląsk         | LZK  | LZK  | ZKL  | ZKL  | ZKL  | LZK  | ZKL  | LZK  |
| Mazowsze i Podlasie          | ZKL  | KLZ  | ZKL  | KLZ  | KLZ  | ZKL  | ZKL  | ZKL  |
| Małopolska i Pogórze         | ZKL  | LZK  | ZKL  | LZK  | ZKL  | LZK  | KLZ  | LZK  |
| <b>Zwierzęta ziarnożerne</b> |      |      |      |      |      |      |      |      |
| POLSKA                       | KLZ  | ZKL  | KLZ  | KLZ  | LZK  | LZK  | ZKL  | LZK  |
| Pomorze i Mazury             | KLZ  | ZKL  | LZK  | KLZ  | ZKL  | ZKL  | LZK  | ZKL  |
| Wielkopolska i Śląsk         | KLZ  | ZKL  | KLZ  | ZKL  | LZK  | KLZ  | KLZ  | ZKL  |
| Mazowsze i Podlasie          | ZKL  | LZK  | LZK  | ZKL  | ZKL  | KLZ  | KLZ  | KLZ  |
| Małopolska i Pogórze         | LZK  | LZK  | LZK  | LZK  | ZKL  | ZKL  | ZKL  | ZKL  |
| <b>Mieszane</b>              |      |      |      |      |      |      |      |      |
| POLSKA                       | LZK  | ZKL  | KLZ  | KLZ  | ZKL  | ZKL  | LZK  | ZKL  |
| Pomorze i Mazury             | KLZ  | ZKL  | ZKL  | LZK  | LZK  | KLZ  | LZK  | KLZ  |
| Wielkopolska i Śląsk         | LZK  | KLZ  | ZKL  | ZKL  | LZK  | LZK  | ZKL  | LZK  |
| Mazowsze i Podlasie          | LZK  | LZK  | ZKL  | KLZ  | ZKL  | ZKL  | KLZ  | ZKL  |
| Małopolska i Pogórze         | LZK  | LZK  | ZKL  | ZKL  | ZKL  | KLZ  | KLZ  | ZKL  |

Źródło: Opracowanie własne na podstawie danych FADN.

Podobnie jak w przypadku rozpatrywania profili produkcyjnych według wielkości gospodarstwa, tak i w zestawieniu według typu działalności trudno dostrzec prawidłowości dynamiczne. Najczęściej występującym profilem produkcji jest wariant ZKL, czyli taki, w którym praca jest substytutem czynnika składającego się z ziemi i kapitału. Najrzadziej spotykanym w latach 2004-2011 profilem produkcji jest KLZ, w którym ziemia jest substytutem czynnika składającego się z kapitału i pracy.

Z obu porównań wynikają podobne wnioski. Po pierwsze, zmienność profili produkcyjnych w regionach FADN może wynikać z przystosowywania się producentów do warunków produkcji w ramach Wspólnej Polityki Rolnej z uwzględnieniem lokalnych ograniczeń. Po drugie, ziemia jest co prawda nie dającym się pominąć czynnikiem produkcji w rolnictwie, ale jej znaczenie jest systematycznie marginalizowane.

### 3.3. Podobieństwo profili produkcyjnych w czasie i przestrzeni

W poprzedniej części opracowania porównaliśmy profile produkcyjne producentów rolnych dzielonych według kryteriów wielkości gospodarstwa albo typu działalności. W części 2.3 zreferowaliśmy ideę badania podobieństwa funkcji. Badanie podobieństwa profili produkcyjnych odpowiada na pytanie, czy i w jakim stopniu różne profile produkcyjne gwarantują otrzymanie podobnej wielkości produkcji w danym roku dla danego zakresu zaangażowania czynników produkcji.

Przedstawimy wyniki badania podobieństwa profili produkcyjnych zidentyfikowanych jako najlepiej dopasowane do danych, lecz nie dla całego okresu 2004-2011, ale tylko dla skrajnych lat tego okresu. Przypomnijmy, że miara podobieństwa jest symetryczna i zwrotna, czyli równa 1 dla identycznych funkcji badanych dla tego samego zakresu wartości zmiennych. Dla każdego regionu FADN porównujemy profil produkcyjny producentów z tego regionu do profilu produkcyjnego z innego regionu. Rezultaty porównań zawierają tabele 6 i 7.

**Tabela 6.** Podobieństwo profili produkcyjnych producentów rolnych w regionach według klasy wielkości producentów rolnych w latach 2004 oraz 2011

| Regiony              | 2004   |        |         | Regiony | 2011   |        |         |
|----------------------|--------|--------|---------|---------|--------|--------|---------|
|                      | PomMaz | WielŚl | MazPodl |         | PomMaz | WielŚl | MazPodl |
| Małe                 |        |        |         |         |        |        |         |
| Wielkopolska i Śląsk | 0,726  | x      | x       | WielŚl  | 0,998  | x      | x       |
| Mazowsze i Podlasie  | 0,985  | 0,785  | x       | MazPodl | 0,824  | 0,854  | x       |
| Małopolska i Pogórze | 0,721  | 0,485  | 0,735   | MałpPog | 0,763  | 0,806  | 0,995   |
| Średnio małe         |        |        |         |         |        |        |         |
| Wielkopolska i Śląsk | 0,639  | x      | x       | WielŚl  | 0,722  | x      | x       |
| Mazowsze i Podlasie  | 0,803  | 0,884  | x       | MazPodl | 0,720  | 0,995  | x       |
| Małopolska i Pogórze | 0,803  | 0,895  | 0,999   | MałpPog | 0,997  | 0,723  | 0,732   |
| Średnio duże         |        |        |         |         |        |        |         |
| Wielkopolska i Śląsk | 0,917  | x      | x       | WielŚl  | 0,955  | x      | x       |
| Mazowsze i Podlasie  | 0,942  | 0,999  | x       | MazPodl | 0,802  | 0,762  | x       |
| Małopolska i Pogórze | 0,906  | 0,702  | 0,717   | MałpPog | 0,968  | 0,973  | 0,851   |

Źródło: Opracowanie własne na podstawie danych FADN.

Dane w tabeli można interpretować element po elemencie. Przykładowo, u małych producentów rolnych najmniej podobne były profile produkcyjne producentów pochodzących z regionów Małopolska i Pogórze oraz Wielkopolska i Śląsk w 2004 r. (wartość miary 0,485). Najbardziej podobne były profile produkcyjne małych producentów rolnych z regionów Wielkopolska i Śląsk oraz Pomorze i Mazury w 2011 r. Syntetyczną miarą podobieństwa profili produkcyjnych między rokiem  $r_1$  a rokiem  $r_2$   $SP(r_1, r_2)$  definiujemy *ad hoc* jako sumę różnic kwadratów miar podobieństwa między regionami. Im mniejsza wartość

miary, tym większe łączne podobieństwo profili produkcyjnych w porównywalnych latach. Otrzymujemy  $SP(2004,2011) = 0,277$  dla producentów małych,  $SP(2004,2011) = 0,165$  dla producentów średnio małych oraz  $SP(2004,2011) = 0,172$  dla producentów średnio dużych.

Porównamy teraz zmienność profili produkcyjnych ze względu na typ działalności producenta rolnego. Odpowiednie dane zawiera tabela 7.

**Tabela 7.** Podobieństwo profili produkcyjnych producentów rolnych w regionach według typu działalności producentów rolnych w latach 2004 oraz 2011

| Regiony               | 2004   |        |         | Regiony | 2011   |        |         |
|-----------------------|--------|--------|---------|---------|--------|--------|---------|
|                       | PomMaz | WielŚl | MazPodl |         | PomMaz | WielŚl | MazPodl |
| Uprawy polowe         |        |        |         |         |        |        |         |
| Wielkopolska i Śląsk  | 0,994  | x      | x       | WielŚl  | 0,710  | x      | x       |
| Mazowsze i Podlasie   | 0,989  | 0,997  | x       | MazPodl | 0,855  | 0,944  | x       |
| Małopolska i Pogórze  | 0,984  | 0,993  | 0,999   | MałpPog | 0,984  | 0,730  | 0,889   |
| Krowy mleczne         |        |        |         |         |        |        |         |
| Wielkopolska i Śląsk  | 0,981  | x      | x       | WielŚl  | 0,781  | x      | x       |
| Mazowsze i Podlasie   | 0,860  | 0,789  | x       | MazPodl | 0,995  | 0,734  | x       |
| Małopolska i Pogórze  | 0,782  | 0,726  | 0,973   | MałpPog | 0,753  | 1,000  | 0,992   |
| Zwierzęta ziarnożerne |        |        |         |         |        |        |         |
| Wielkopolska i Śląsk  | 0,987  | x      | x       | WielŚl  | 1,000  | x      | x       |
| Mazowsze i Podlasie   | 0,825  | 0,837  | x       | MazPodl | 0,850  | 0,835  | x       |
| Małopolska i Pogórze  | 0,735  | 0,660  | 0,967   | MałpPog | 0,726  | 0,729  | 0,971   |
| Mieszane              |        |        |         |         |        |        |         |
| Wielkopolska i Śląsk  | 1,000  | x      | x       | WielŚl  | 1,000  | x      | x       |
| Mazowsze i Podlasie   | 0,747  | 0,744  | x       | MazPodl | 0,993  | 0,992  | x       |
| Małopolska i Pogórze  | 0,988  | 0,983  | 0,749   | MałpPog | 0,997  | 0,998  | 0,955   |

Źródło: Opracowanie własne na podstawie danych FADN.

W kilku przypadkach odnotowujemy zbliżone do pełnego podobieństwo profili produkcyjnych mimo innych postaci analitycznych funkcji produkcji. Interesujące jest zestawienie wartości syntetycznych miar *ad hoc*. Są one równe  $SP(2004,2011) = 0,183$  dla typu „uprawy polowe”,  $SP(2004,2011) = 0,137$  dla typu „krowy mleczne”,  $SP(2004,2011) = 0,006$  dla typu „zwierzęta ziarnożerne” oraz  $SP(2004,2011) = 0,164$  dla typu „mieszane”. Ogółem profile produkcyjne w regionach w typie produkcji „zwierzęta ziarnożerne” w latach 2004 i 2011 są prawie identyczne.

## Podsumowanie

W opracowaniu wykorzystaliśmy dane indywidualne pochodzące z bazy *Farm Accountancy Data Network* do badania różnicowania profili produkcyjnych producentów rolnych. Zgodnie z obowiązującą w FADN nomenklaturą

przyjęliśmy podział Polski na regiony oraz podział producentów ze względu na ich wielkość ekonomiczną i typ działalności. Dla zbioru producentów o określonym typie działalności albo dla producentów danej wielkości i dla każdego regionu, oszacowano trzy różne warianty zagnieżdżonej trójczynnikowej funkcji produkcji. Wybraną spośród nich, najlepiej dopasowaną do danych empirycznych, nazwaliśmy profilem produkcyjnym wyróżnionej grupy producentów.

Wyniki badania wskazują, że w latach 2004-2011 profile producentów rolnych charakteryzują się zmiennością, dla dynamiki której trudno znaleźć wyraźne prawidłowości. Stwierdziliśmy przewagę takich profili produkcyjnych, które minimalizują rolę ziemi jako czynnika decydującego o profilu produkcyjnym producenta rolnego.

Ustalono ponadto, że pomimo zróżnicowania profili produkcyjnych ze względu na wzajemne związki między czynnikami produkcji o charakterze strukturalnym i substytucyjnym, istnieje duże podobieństwo profili produkcyjnych ze względu na możliwą do osiągnięcia wartość produkcji. Podobieństwo profili produkcyjnych jest mniejsze w przypadku rozpatrywania producentów w podziale na regiony i wielkość ekonomiczną, a większe – w momencie podziału producentów na regiony i typ działalności.

Wyniki badania wydają się obiecujące. W przypadku kontynuowania badań dostęp do danych z bazy FADN dla kolejnych lat pozwoli otrzymać obraz dynamiki profili produkcyjnych w okresie dłuższym niż lata 2004-2011. Można oczekiwać, że staną się wówczas zauważalne prawidłowości zmian profili produkcyjnych w czasie. Zmiany tych profili, dotyczące struktury i substytucji czynników produkcji, winny być wtedy porównane z podobnie wyznaczonymi profilami produkcyjnymi producentów rolnych w innych krajach Unii Europejskiej. Takie badanie umożliwi weryfikację hipotezy o stosowaniu przez producentów rolnych we wszystkich krajach Unii podobnych strategii produkcyjnych. W przypadku weryfikacji pozytywnej, może to prowadzić do wniosku o skutecznym wpływie Wspólnej Polityki Rolnej na konwergencję zachowań producentów rolnych.

## Literatura

- Arrow K., Chenery H.B., Minhas B.S., Solow M. (1961), *Capital-Labor Substitution and Economic Efficiency*, „Review of Economics and Statistics”, 43, s. 225-247.
- Blackorby Ch., Russell R.R. (1989), *Will the Real Elasticity of Substitution Please Stand Up? (A Comparison of the Allen/Uzawa and Morishima Elasticities)*, „American Economic Review”, 79, s. 882-888.
- Bocian M., Cholewa I., Tarasiuk R. (2014), *Współczynniki Standardowej Produkcji „2010” dla celów Wspólnotowej Typologii Gospodarstw Rolnych*, IERiGŻ-PIB, Warszawa.

- Caselli F., Coleman W.J. (2002), *The U.S. Technology Frontier*, „American Economic Review Papers and Proceedings”, 92, s. 148-192.
- Cobb C.W., Douglas P.H. (1928), *A Theory of Production*, „American Economic Review”, 18, s. 139-165.
- Dorosiewicz S., Michalski T. (1998), *Podobieństwo funkcji w badaniach ekonomicznych (metody i przykłady)*, „Przegląd Statystyczny”, 2, s. 187-196.
- Feokistov V. (2006), *Differential Evolution. In Search of Solutions*, Springer Verlag.
- Greene W.H. (2000), *Econometric Analysis*, 4<sup>th</sup> edition, Prentice Hall International, Inc.
- Growiec J. (2012), *Zagregowana funkcja produkcji w ekonomii wzrostu gospodarczego i konwergencji*, Oficyna Wydawnicza Szkoły Głównej Handlowej, Warszawa.
- Henningsen A., Henningsen G. (2014), *Econometric Estimation of the Constant Elasticity of Substitution Function in R: Package micEconCES*, [cran.r-project.org/web/packages/micEconCES/vignettes/CES.pdf](http://cran.r-project.org/web/packages/micEconCES/vignettes/CES.pdf) (dostęp: 27.01.2015).
- Kemfert C. (1998), *Estimated substitution elasticities of a nested CES production function approach for Germany*, „Energy Economics”, 20(3), s. 249-264.
- Krusell P.L., Ohanian J.-V., Rios-Rull, Violante G. (2000), *Capital-Skill Complementarity and Inequality: A Macroeconomic Analysis*, „Econometrica”, 68, s. 1029-1054.
- McFadden D. (1963), *Constant Elasticity of Substitution Production Functions*, „Review of Economic Studies”, 31, s. 73-83.
- Mishra S.K. (2007), *A Note on Numerical Estimation of Sato's Two-Level CES Production Function*, MPRA Paper 1019, North-Eastern Hill University, Shillong.
- Płonka R., Smolik A., Cholewa I., Bocian M., Juchnowska E., Osuch D. (2015), *Najważniejsze informacje niezbędne do interpretacji wyników Polskiego FADN stan na dzień 2015-01-30*, <http://fadn.pl/wp-content/uploads/metodyka/Najwazniejsze-informacje.pdf> (dostęp: 02.03.2015).
- Price K., Storn R.M., Lampinen J.A. (2005), *Differential Evolution. A Practical Approach to Global Optimization*, Springer Verlag.
- Sato K. (1967), *A Two-level Constant-Elasticity-of-Substitution Production Function*, „Review of Economic Studies”, 43, s. 201-218.
- Sielska A. (2014), *Podjęmowanie decyzji produkcyjnych w gospodarstwach rolnych przy wielorakości celów*, niepublikowana rozprawa doktorska, Kolegium Zarządzania i Finansów, Szkoła Główna Handlowa, Warszawa.
- Storn R.M., Price K. (1997), *Differential Evolution – A Simple and Efficient Heuristic for Global Optimization over Continuous Spaces*, „Journal of Global Optimization”, 11, s. 341-359.
- Uzawa H. (1962), *Production Functions with Constant Elasticities of Substitution*, „Review of Economic Studies”, 29, s. 291-299.
- Żółtowska E. (1997), *Funkcje produkcji. Teoria, estymacja, zastosowania*, Wydawnictwo Uniwersytetu Łódzkiego, Łódź.

---

**PRODUCTION PROFILES OF POLISH AGRICULTURAL PRODUCERS IN FADN REGIONS**

**Summary:** The purpose of this paper is to identify production profiles of agricultural producers depending on region, economic size of the farm and type of production. Production profiles are characterized by parameters of nested CES functions.

Our analysis is based on the estimation of three types of nested CES function and selection of production profiles that fit data best. We take into account dynamics of production profiles in the period 2004-2011 and similarity of production profiles with different structure and substitution of production factors. The data are obtained from FADN database.

The results show that there are no clear regularities in changes of production profiles in the period 2004-2011. Although different production profiles are chosen for individual subsets of farms, it is possible to assess their overall similarity. The similarity of production profiles with respect to type of production is greater than the similarity with respect to economic size of farms.

**Keywords:** type of agricultural producer, microeconomic production function, compatibility measure of production profiles.



**Piotr Miszczyński**

Uniwersytet Łódzki  
Wydział Ekonomiczno-Socjologiczny  
Katedra Badań Operacyjnych  
piotr.miszczynski@uni.lodz.pl

## PRZYKŁAD WYKORZYSTANIA WSKAŹNIKA CLV W OCENIE PROJEKTU INWESTYCYJNEGO

**Streszczenie:** Od kilku lat można zaobserwować dynamiczne zmiany natury regulacyjnej i technologicznej, które mają duży wpływ na marżę i zyskowność w sektorze bankowości detalicznej. Przy pojawiającej się presji rynkowej na konsolidację w polskim sektorze bankowym, coraz większe znaczenie ma prawidłowa ocena projektów inwestycyjnych w kontekście ich wyceny. Jedną z metod wspomagających wycenę projektu jest podejście szacowania długookresowej wartości klienta – CLV (*Customer Lifetime Value*). W pracy przytoczono różne podejścia do szacowania CLV oraz opisano przykład szacowania wskaźnika na gruncie polskim.

**Słowa kluczowe:** *Customer Lifetime Value*, wycena inwestycji, podejmowanie decyzji.

### Wprowadzenie

Każde przedsiębiorstwo ma na celu kreowanie swojej wartości. Wartość przedsiębiorstwa zależy od zdobytego kapitału. Dlatego niezwykle istotne znaczenie ma prawidłowa ocena przedsięwzięcia z punktu widzenia budowania kapitału. Projekty inwestycyjne mają na celu zwiększenie wartości przedsiębiorstwa dla jego udziałowców. Jednym ze składników kapitału przedsiębiorstwa są jego klienci, którzy przynoszą przedsiębiorstwu przepływy pieniężne w zamian za dostarczane przez przedsiębiorstwo produkty lub usługi [por. Doyle, 2003]. W szczególności w branży bankowej jednym z najważniejszych składników kapitału są klienci i zbudowane z nimi relacje. Dlatego wartość portfela klientów należy liczyć i analizować na podstawie kreowanej dzięki nim wartości przez obecne, i co równie ważne, przyszłe strumienie pieniężne w całym okresie, w którym utrzymują oni relacje z bankiem [por. Dobiegała-Korona i in., 2010, s. 24-26].



Pojęcie wartości klienta zostało po raz pierwszy sformułowane przez Philipa Kotlera w 1974 r. jako „obecna wartość przyszłych strumieni zysków oczekiwanych w danym horyzoncie czasowym z dokonywanych transakcji z klientem” [Kotler, 1974, s. 24]. Koncepcja wartości klienta jest obecnie coraz szerzej stosowana w praktyce zarządzania w przedsiębiorstwach. Najnowsze trendy w wykorzystaniu tej koncepcji to m.in. [Dobiegała-Korona&Tomczyk, 2015, s. 268]:

- wartość klienta jako czynnik istotnie wpływający na wartość dla głównych interesariuszy przedsiębiorstwa, przede wszystkim akcjonariuszy,
- wartość klienta jako podstawa do zarządzania marketingowego zgodnie z koncepcją Kotlera i Kellera,
- wartość klienta jako najlepsza syntetyczna miara efektywności inwestycji w działania marketingowe.

Tak sformułowaną wartość klienta można mierzyć za pomocą wskaźnika CLV (*Customer Lifetime Value*). Jest to jedno z podejść do oceny wartości klienta, które kładzie nacisk na relacje w dłuższym okresie czasu. Dlatego też w literaturze przedmiotu często nazywane jest „prospektywną”, „długookresową” lub „życiową” oceną wartości klienta [zob. Caputa, 2015, s. 61].

Od kilku lat można zaobserwować dynamiczne zmiany natury regulacyjnej i technologicznej, które mają duży wpływ na marżę i zyskowność w sektorze bankowości detalicznej. Pojawiająca się presja rynkowa na konsolidację w polskim sektorze bankowym ma swoje korzenie w ogólcenoeuropejskich tendencjach rynkowych, szeroko opisywanych i komentowanych jeszcze w poprzedniej dekadzie zarówno przez środowisko naukowe, jak i praktyków [por. Haenlein i in., 2007]. Dlatego coraz większe znaczenie ma prawidłowa ocena projektów inwestycyjnych w sektorze bankowym w kontekście ich wyceny, także na gruncie polskim. Specyfiką sektora bankowości detalicznej jest fakt, iż głównym aktywnym w tego typu działalności są klienci, z którymi długookresowa relacja jest istotą działalności bankowej i podstawowym źródłem przychodu. Nie powinien więc dziwić fakt, że jedną z metod wspomagających ocenę efektu projektu inwestycyjnego w branży bankowej jest wywodzące się z marketingu, omawiane w niniejszym artykule, podejście szacowania długookresowej wartości klienta – CLV (*Customer Lifetime Value*).

Przy wykorzystaniu wartości klienta jako podstawy do wyceny przedsiębiorstw, warto wspomnieć o krytyce wobec tego podejścia, jaką można spotkać w literaturze przedmiotu. Podnoszone argumenty dotyczą przede wszystkim zarzutu spłylenia relacji klient-firma jedynie do aspektu czysto finansowego z pominięciem m.in. relacji o charakterze niefinansowym oraz nieuwzględnieniu czynnika ryzyka. Ponadto podnoszony jest argument, że należy być ostrożnym, dokonując

porównań przy zastosowaniu wskaźnika CLV ze względu na różnorodną metodologię wyliczania tego wskaźnika [Doligalski, 2010, s. 83-84]. Wskazane wady mają jednak tylko szczególne znaczenie przy zastosowaniach czysto marketingowych i związanymi z nimi porównaniami rynkowymi. W przypadku wykorzystania wskaźnika CLV do wyceny przedsiębiorstwa jako efektu projektu inwestycyjnego, nie mają one tak dużego znaczenia. Głównie ze względu na cel tego typu analiz, jakim jest de facto ocena finansowa inwestycji.

## 1. Metody obliczania wskaźnika CLV

W literaturze przedmiotu pomiar wskaźnika CLV nie ma ujednoliconej formy i zależy często od dostępności danych i specyfiki branży, dla której jest on szacowany. Niemniej jednak można wyróżnić kilka głównych, niekoniecznie wzajemnie wykluczających się podejść [por. Dobiegała-Korona i in., 2010, s. 28-37].

Punktem wyjścia dla modeli CLV jest zaproponowany przez P. Doyle'a podstawowy model oparty o przepływy gotówkowe generowane w okresie relacji klienta z firmą [Doyle, 2003]:

$$CLV = \sum_{n=0}^N \frac{NCF_n}{(1+d)^n}$$

gdzie:

NCF – przepływy pieniężne netto (Nett Cash Flow) generowane dzięki relacji bank-klient,

n – n-ty okres analizy,

N – horyzont czasowy analizy,

d – stopa dyskontowa (zazwyczaj przyjmuje się średnio ważony koszt kapitału dla wybranego przedsiębiorstwa lub przy analizach porównawczych przyjmuje się średnią wartość rynkową, obecnie ok. 10%).

Jednakże najprostszym modelem jest zaproponowana przez Gupta i Lehmana wartość bieżąca wszystkich przyszłych czynników mających wpływ na wartość klienta [por. Gupta&Lehmann, 2005]. Wartość CLV w tym przypadku została sprowadzona do najprostszej postaci wyliczanej na podstawie finansowej (księgowej) kategorii zysku:

$$CLV = \sum_{n=0}^N \frac{m_n}{(1+d)^n}$$

gdzie:

$m_n$  – zysk na kliencie w n-tym okresie analizy,

n – n-ty okres analizy,

$N$  – horyzont czasowy analizy,  
 $d$  – stopa dyskontowa.

Model CLV doczekał się wielu modyfikacji, wśród których do najistotniejszych należy modyfikacja podstawowego modelu uwzględniająca wskaźnik retencji dla określonej grupy klientów. Tak liczony wskaźnik CLV dotyczy homogenicznej względem wybranych kryteriów grupy klientów (segmentu):

$$CLV = \sum_{n=0}^N \frac{m_n \times r^n}{(1+d)^n}$$

gdzie:

$m_n$  – zysk na kliencie w  $n$ -tym okresie analizy,  
 $r^n$  – stopa retencji (procent klientów, z którymi nadal utrzymywana jest relacja w kolejnym okresie analizy),  
 $n$  –  $n$ -ty okres analizy,  
 $N$  – horyzont czasowy analizy,  
 $d$  – stopa dyskontowa.

Często zakładając długoterminową relację bank-klient, nie ogranicza się horyzontu analizy ( $N$ ) i przyjmuje się  $N \rightarrow \infty$ , dzięki czemu formułę na wyliczenie CLV można sprowadzić do następującej postaci [por. np. Safari, 2015]:

$$CLV = \frac{m \times r}{(1+d-r)}$$

gdzie:

$m$  – średni zysk na kliencie w ciągu jednego okresu analizy (np. w ciągu roku),  
 $r$  – średnia stopa retencji,  
 $d$  – stopa dyskontowa.

W literaturze przedmiotu można dotrzeć do kolejnych wersji modeli szacowania CLV, które są jedynie uszczegółowieniem powyższych podstawowych koncepcji o konkretne czynniki, które mają wpływ na wartość klienta [por. np. Ekinci i in., 2014]. Czynniki te nie są przedmiotem rozważań niniejszej pracy, jednak warto je wymienić ze względu na interpretację wskaźnika CLV, będącego de facto wskaźnikiem syntetyzującym wycenę efektu różnorodnych relacji bank-klient.

**Tabela 1.** Czynniki wpływające na wartość CLV w bankowości detalicznej

| Stymulanty                                                                                                                     | Destymulanty                                                                                                                                                                                                      |
|--------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|-------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|
| <b>Okres utrzymania relacji z klientem:</b><br>z reguły liczony jako odwrotność stopy zatrzymań.                               | <b>Koszt akwizycji:</b> koszt bezpośrednich działań marketingowych w celu pozyskania klienta.                                                                                                                     |
| <b>Przychód per klient w okresie:</b> z reguły przychody prowizyjne i odsetkowe brutto na kliencie.                            | <b>Stopa odejść (tzw. churn):</b> liczona jako roczna stopa zamknięć rachunków.                                                                                                                                   |
| <b>Korekta ze względu na inne czynniki:</b><br>(a) inkrementalne koszty marketingowe,<br>(b) wskaźnik „przyrostu naturalnego”. | <b>Stopa dyskontowa:</b> zależna od kosztu kapitału własnego, z reguły liczona za pomocą modelu CAPM lub WACC.<br><br><b>Koszt retencji:</b> koszt utrzymania klienta (np. koszt programów lojalnościowych itp.). |

Źródło: Opracowanie własne na podst. prac: Singh&Jain [2013] oraz Kahreh i in. [2014].

## 2. Przykład obliczenia CLV dla rynku polskiego

Poniżej zaprezentowano obliczenia wskaźnika CLV dla przykładowego projektu bankowego, który mógłby być wdrożony w warunkach polskiego rynku bankowości detalicznej.

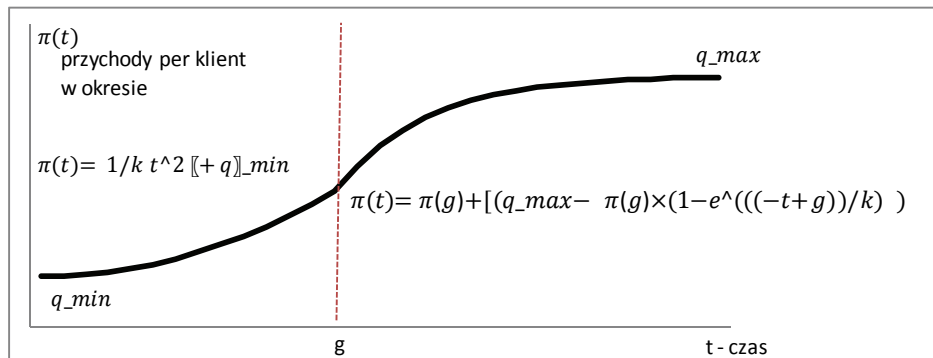
### 2.1. Zmienne w modelu CLV – przykład bankowości detalicznej

W przykładzie posłużono się przytaczanym wcześniej modelem CLV wg Gupty i Lehmana. Głównymi zmiennymi w modelu są zysk z działalności bankowej, liczba klientów i stopa dyskontowa. Prognoza zysku z działalności bankowej została wyliczona jako zmienna wynikowa przykładowego biznesplanu dla nowego projektu bankowego w Polsce. Przyjęte w przykładowym planie wartości parametrów zostały przyjęte na podstawie analizy rynku polskiego, w szczególności nowych projektów, m.in. mBank, Alior Bank, Meritum Bank, Getin Bank, Bank Pocztowy i Orange Finance. Analizy te były uzupełnione danymi z Narodowego Banku Polskiego [por. www NBP, 2015] oraz Głównego Urzędu Statystycznego [por. www GUS, 2015]. Prognoza przyrostu liczby klientów również została przyjęta na podstawie przytoczonych powyżej porównań rynkowych oraz danych z analiz PRNews [por. www PRNews, 2015]. Na podstawie wywiadów z praktykami z sektora bankowości detalicznej w Polsce przyjęto stopę dyskontową na poziomie 10% jako średnią rynkową.

## 2.2. Ekstrapolacja zmiennych

Najważniejszą zmienną w modelu CLV jest prognozowana wartość zysku osiąganego dzięki relacji bank–klient. Dokonując prognozy zysku osiąganego na kliencie możemy się posłużyć zaproponowaną przez Bergera i Nasr funkcją aproksymującą [por. Berger&Nasr, 1998]. Aby tego dokonać, musimy obliczyć zyski, jakie osiągamy w początkowym okresie oraz oszacować zyski, jakie będziemy wypracowywać po osiągnięciu „dojrzałości” w relacji bank–klient (zakładaną zazwyczaj na okres od 3 do 5 lat). Ewentualnie, w przypadku gdy posiadamy projekcje finansowe ze szczegółowego biznesplanu, możemy porównać zmienną wynikową modelu, czy przebiega w sposób zbliżony do modelowego.

$$\Pi(t) = \begin{cases} \Pi_1(t) = \frac{1}{k}t^2 + q_{\min} & \text{dla } t \leq g \\ \Pi_2(t) = \Pi_1(g) + \left[ q_{\max} - \Pi_1(g) \times (1 - e^{\frac{-t+g}{k}}) \right] & \text{dla } t > g \end{cases}$$



gdzie:

$\Pi(t)$  – przychody per klient w okresie  $t$

$q_{\min}$  – początkowe niskie dochody per klient

$q_{\max}$  – dochody po osiągnięciu pełnej dojrzałości

$g$  – punkt startu dojrzewania klienta (wybranego portfela klientów)

$k$  – liczba podokresów w roku

(np.  $k=4$  dla danych kwartalnych)

**Rys. 1.** Średni przychód na klienta rosnący w czasie

Źródło: Opracowanie własne na podst. Berger&Nasr [1998].

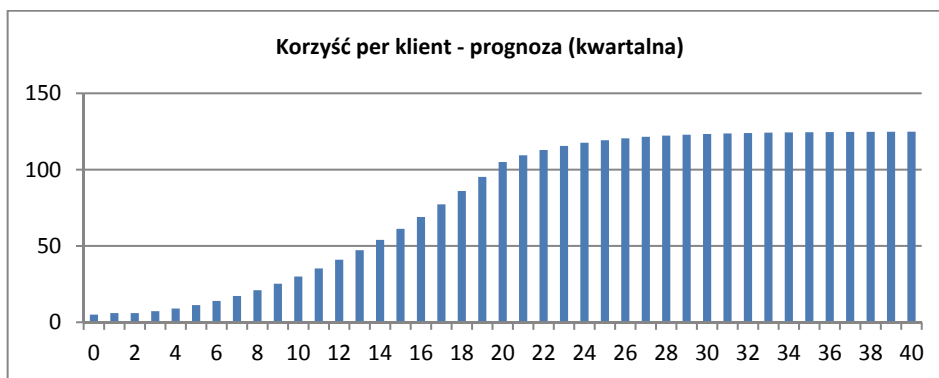
### 2.3. Przykładowe wyliczenia dla nowego projektu bankowego

Do przykładowych wyliczeń przyjęto wartości parametrów wyliczone na podstawie średnich rynkowych na rynku polskim i korygując je ze względu na specyfikę nowego projektu i dodatkowych kosztów wejścia na rynek.

**Tabela 2.** Parametry przykładu wyliczeń CLV dla nowego projektu bankowego

|                                     |        |                                        |
|-------------------------------------|--------|----------------------------------------|
| stopa dyskontowa [roczna]           | 10%    | [koszt finansowania]                   |
| churn [roczny]                      | 10%    | [roczna stopa utraty klientów]         |
| okres „życia” klienta               | 10     | [lata]                                 |
| średniokwartalna korzyść per klient | 125 zł | [wartość po osiągnięciu „dojrzałości”] |
| średnioroczna korzyść per klient    | 500 zł | [wartość po osiągnięciu „dojrzałości”] |

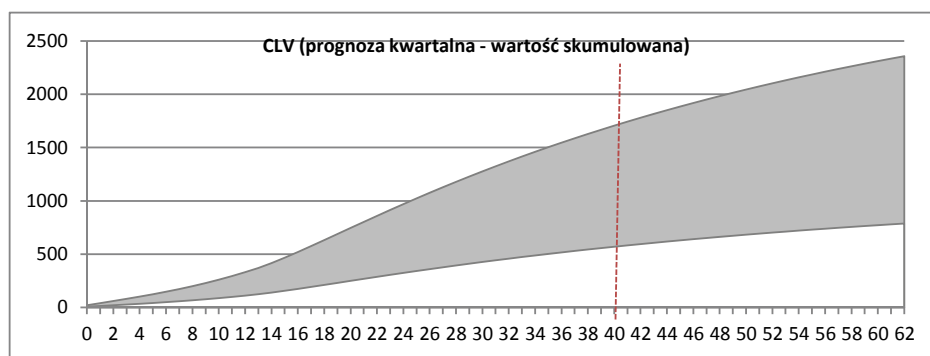
Źródło: Opracowanie własne.



**Rys. 2.** Przykładowy średni przychód na klienta

Źródło: Opracowanie własne.

Dokonując prognozy, warto przeprowadzić obliczenia dla przynajmniej dwóch wariantów (optymistycznego i pesymistycznego). Wariant najbardziej prawdopodobny powinien mieścić się w widełkach wyznaczonych przez dwa skrajne warianty.



**Rys. 3.** Prognoza skumulowanej krzywej CLV

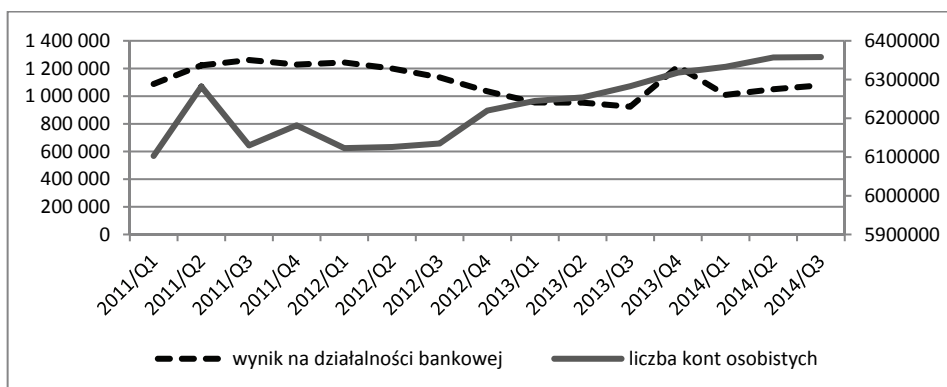
Źródło: Opracowanie własne.

W przypadku omawianego przykładu wartość CLV w horyzoncie 10 lat wynosi 1705 zł. Jest to obecna wartość 10-letnich relacji z klientem. Na tej podstawie można wycenić wartość portfela klientów przykładowego banku oraz dokonać porównań rynkowych.

## 2.4. Przykład analizy porównawczej na rynku polskim

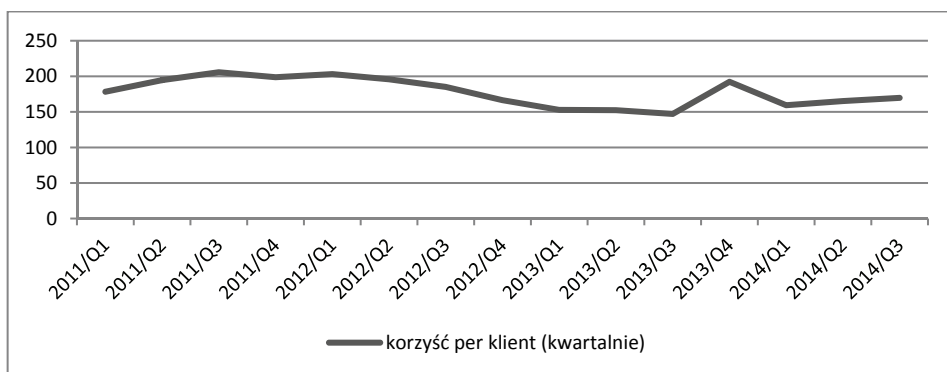
Aby móc w pełni ocenić zasadność wyliczeń dla projektu inwestycyjnego, należy odnieść otrzymane wyniki do sytuacji rynkowej. W tym celu dokonano próby wyliczenia wskaźnika CLV dla wybranych polskich banków. Jak to zostało wspomniane już wcześniej, przy porównaniu należy pamiętać, że każdy bank posiada swoją specyfikę działania i inną politykę akwizycji klientów. Jednakże w celu dokonania analizy porównawczej, niezbędne jest przedstawienie upraszczającego założenia o homogeniczności ogółu klientów banków detalicznych. Konieczność ta wynika ze znajomości jedynie ogólnego profilu i założeń strategicznych banków i braku znajomości szczegółów dotyczących różnych segmentów klientów akwirowanych przez poszczególne banki. Należy przyjąć, że klienci banków detalicznych stanowią stosunkowo homogeniczną grupę i można ich traktować razem na potrzeby analizy porównawczej.

W analizie wzięto pod uwagę cztery duże banki detaliczne: PKO BP S.A., Pekao S.A., mBank S.A. oraz ING Bank Śląski S.A. Na podstawie danych ze sprawozdań finansowych tychże banków [www Biznesradar] oraz danych dotyczących deklarowanej liczby otwartych kont [www PRNews] oszacowano średni kwartalny zysk na klienta z działalności bankowej w okresie 2011-2014.



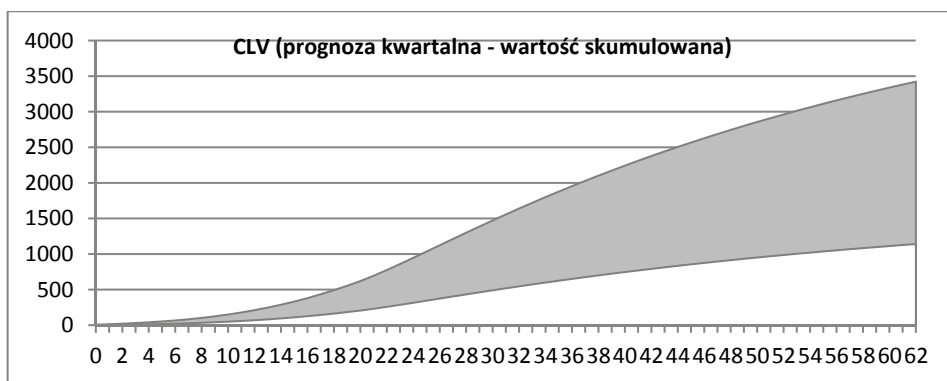
**Rys. 4.** Dane dla banku PKO BP S.A.

Źródło: Opracowanie własne na podst. [www.Biznesradar] oraz [www.PRNews].



**Rys. 5.** Obliczenia dla banku PKO BP S.A.

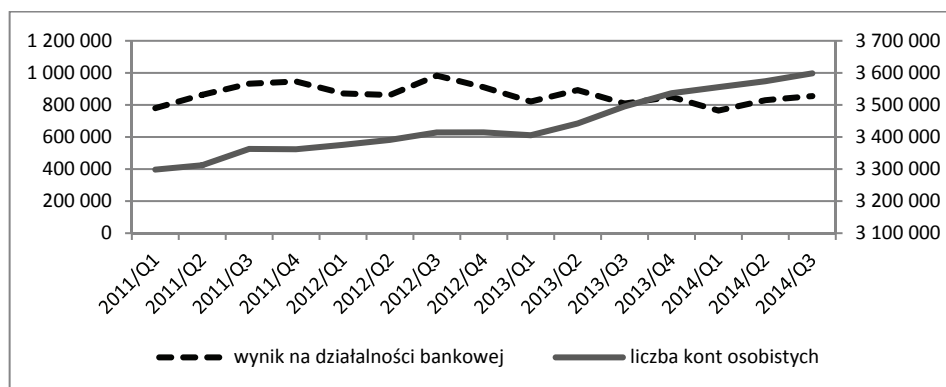
Źródło: Opracowanie własne.



**Rys. 6.** Prognoza CLV dla banku PKO BP S.A.

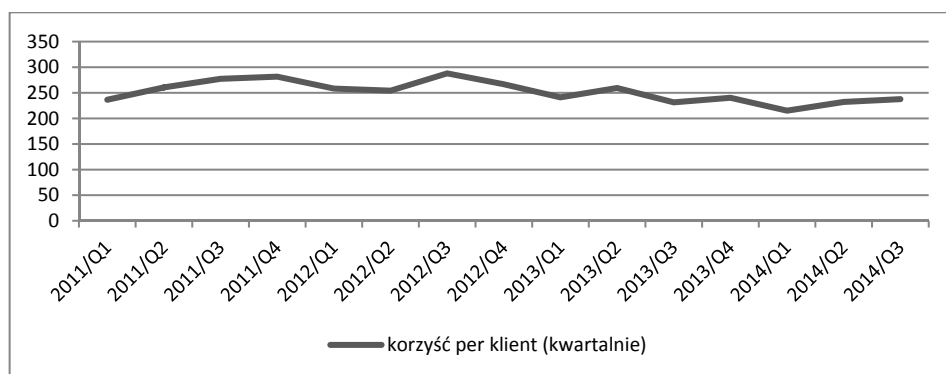
Źródło: Opracowanie własne.





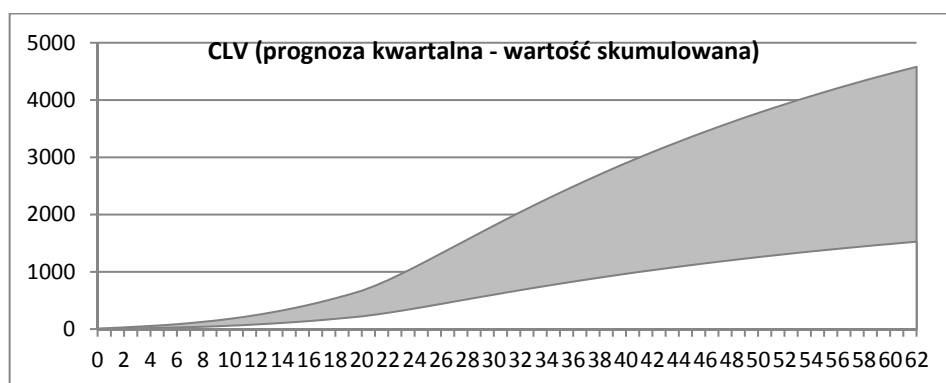
Rys. 7. Dane dla banku Pekao S.A.

Źródło: Opracowanie własne na podst. [www Biznesradar] oraz [wwwPRNews].



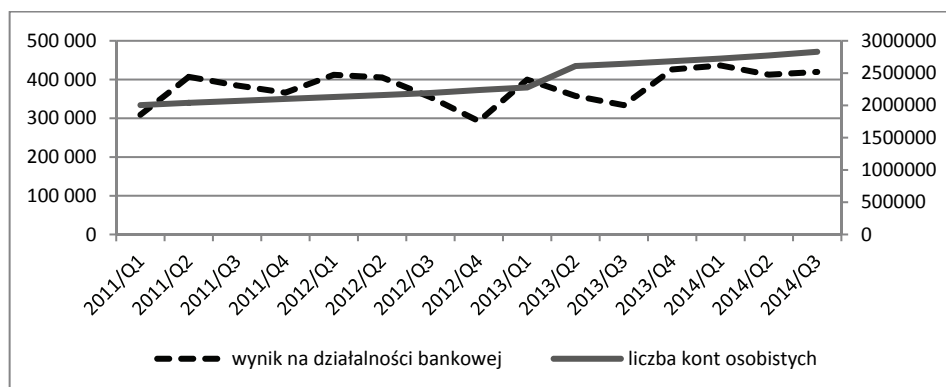
Rys. 8. Obliczenia dla banku Pekao S.A.

Źródło: Opracowanie własne.



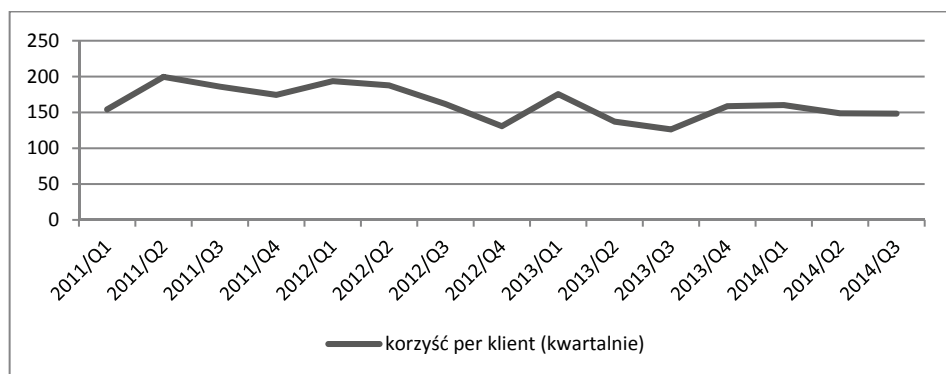
Rys. 9. Prognoza CLV dla banku Pekao S.A.

Źródło: Opracowanie własne.



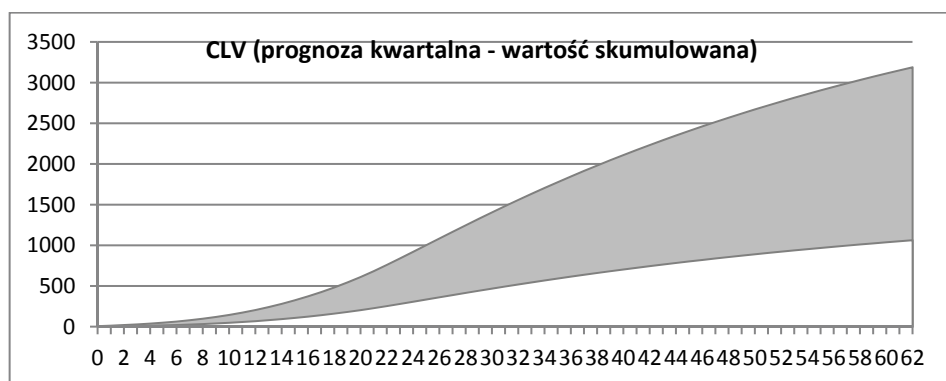
**Rys. 10.** Dane dla mBank S.A.

Źródło: Opracowanie własne na podst. [www.Biznesradar] oraz [www.PRNews].



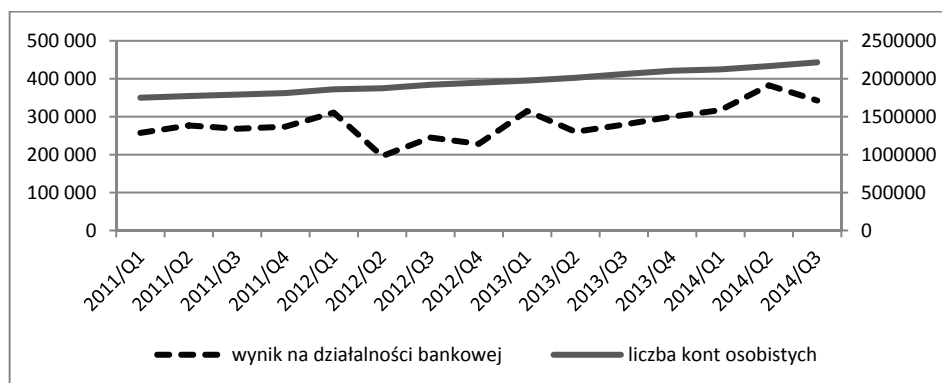
**Rys. 11.** Obliczenia dla mBank S.A.

Źródło: Opracowanie własne.



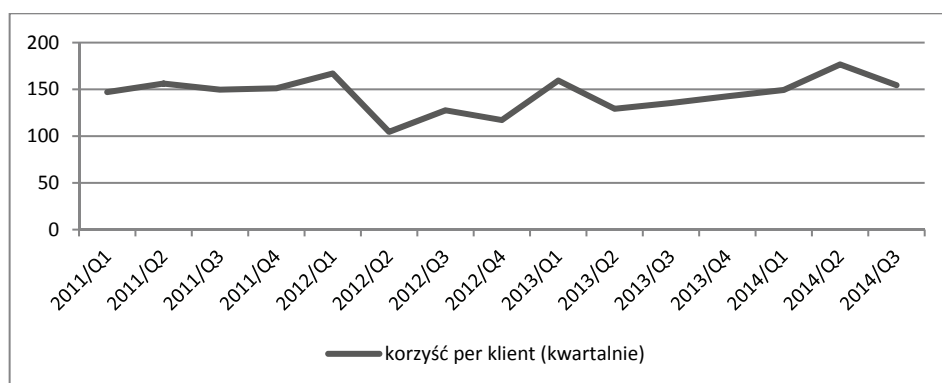
**Rys. 12.** Prognoza CLV dla mBank S.A.

Źródło: Opracowanie własne.



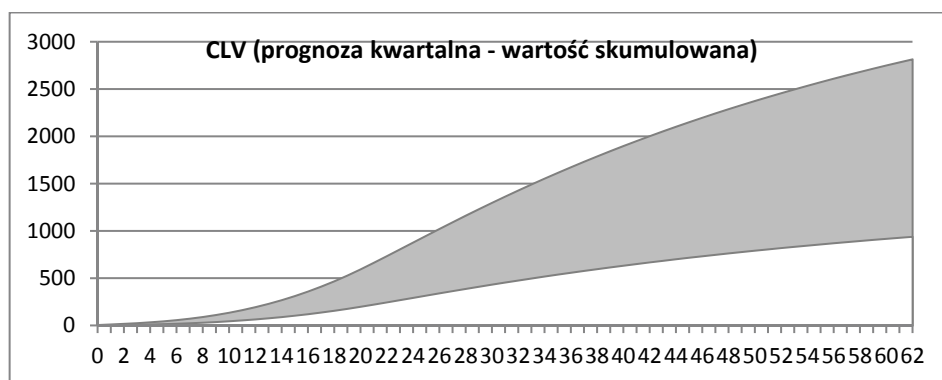
**Rys. 13.** Dane dla ING Bank Śląski S.A.

Źródło: Opracowanie własne na podst. [www Biznesradar] oraz [wwwPRNews].



**Rys. 14.** Obliczenia dla ING Bank Śląski S.A.

Źródło: Opracowanie własne.



**Rys. 15.** Prognoza CLV dla ING Bank Śląski S.A.

Źródło: Opracowanie własne.

Po dokonaniu wyliczeń zestawiono wyniki obliczeń wskaźnika CLV dla nowego przykładowego projektu oraz dla wybranych innych banków detalicznych w horyzoncie 10- i 15-letnim.

**Tabela 3.** Porównanie 10- i 15-letniego wskaźnika CLV w bankowości detalicznej

| Bank                             | CLV 10 lat | CLV 15 lat |
|----------------------------------|------------|------------|
| Przykładowy nowy projekt bankowy | 1765,03 zł | 2522,48 zł |
| PKO BP S.A.                      | 2243,14 zł | 3339,78 zł |
| Pekao S.A.                       | 2900,34 zł | 4462,48 zł |
| mBank S.A.                       | 2109,98 zł | 3112,29 zł |
| ING Bank Śląski S.A.             | 1897,63 zł | 2749,52 zł |

Źródło: Opracowanie własne.

Na podstawie analiz można stwierdzić, że wyliczenia w modelu dla przykładowego projektu bankowego mają realne wartości zbliżone do rynkowych. Jest to punkt wyjścia do dalszych analiz na podstawie wskaźnika CLV na potrzeby oceny inwestycji w pozyskanie klientów przez przykładowy nowy projekt bankowy.

### Podsumowanie i przyszłe badania

Celem badania była analiza opłacalności inwestycji w nowy projekt bankowości detalicznej na rynku polskim. W tym celu posłużono się zyskującym coraz większą popularność wskaźnikiem długookresowej wartości klienta – CLV. Aby sprawdzić realność otrzymanych prognoz wskaźnika CLV, dokonano wyliczeń dla czterech banków detalicznych o ugruntowanej pozycji. Otrzymane wyniki są porównywalne ze względu na zastosowanie takiego samego horyzontu czasowego i tej samej założonej średniej rynkowej stopie dyskontowej. Dzięki porównaniu udało się uwiarygodnić otrzymane wyniki dla przykładowego nowego projektu bankowego. Analizy dokonano przy silnym założeniu o homogeniczności ogółu klientów bankowości detalicznej. Prawdą jest, że różne banki posiadają nieco odmienne strategie rynkowe, pozyskując różne typy klientów (segmenty). Jednakże bez tego założenia analiza porównawcza byłaby niemożliwa do wykonania.

Wskaźnik CLV zyskuje coraz większą popularność w ocenie projektów inwestycyjnych, którego celem jest pozyskanie i utrzymanie relacji z klientami. W niniejszej pracy udało się przenieść na grunt polski koncepcje, które w ostatnim dziesięcioleciu zyskały dużą popularność, w szczególności przy ocenie inwestycji w projekty bankowości detalicznej. W pracy zostało pominięte wyko-

rzystanie koncepcji CLV w połączeniu z podejściem portfelowym, którego integralnym elementem jest segmentacja klientów [Doligalski, 2013, s. 23-24]. Będzie to przedmiotem dalszych prac autora. Szczególnie ciekawe jest tu wykorzystanie metod badań operacyjnych: łańcuchów Markowa i metod symulacyjnych do wyceny wartości poszczególnych segmentów klientów [por. Singh, 2013]. Podejście symulacyjne pozwala na uwzględnienie różnych scenariuszy rozwoju relacji z klientem oraz czynnika losowego. Może mieć to szczególne znaczenie dla inwestorów i menedżerów podejmujących decyzje nt. strategii działania banku detalicznego.

## Literatura

- Berger P.D., Nasr N.I. (1998), *Customer Lifetime Value: Marketing models and Applications*, „Journal of Interactive Marketing”, Vol. 12.
- Caputa W. (2015), *Pomiar kapitału klienta w kontekście kreowania wartości przedsiębiorstwa*, CeDeWu, Warszawa.
- Dobiegała-Korona B., Tomczyk P. (2015), *Praktyczne podejście do budowy wartości klientów*, [w:] B. Dobiegała-Korona (red.), *Budowa wartości klienta, teoria i praktyka*, Difin, Warszawa.
- Dobiegała-Korona B., Doligalski T. (red.) (2010), *Zarządzanie wartością klienta. Pomiar i strategię*, Poltext, Warszawa.
- Doligalski T. (2010), *Wartość a rentowność klienta*, [w:] B. Dobiegała-Korona, T. Doligalski (red.), *Zarządzanie wartością klienta. Pomiar i strategię*, Poltext, Warszawa.
- Doligalski T. (2013), *Internet w zarządzaniu wartością klienta*, Wyd. SGH, Warszawa.
- Doyle P. (2003), *Marketing wartości*, Felberg SJA, Warszawa.
- Ekinci Y., Ulengin F., Uray N., Ulengin B. (2014), *Analysis of customer lifetime value and marketing expenditure decisions through a Markovian-based model*, „European Journal of Operational Research”, 237, s. 278-288.
- Gupta S., Lehmann D. (2005), *Managing Customers as Investments. The strategic Value of Customers in the Long Run*, Wharton School Publ., [w:] B. Dobiegała-Korona, T. Doligalski (red.), *Zarządzanie wartością klienta. Pomiar i strategię*, Poltext, Warszawa 2010.
- Kahre M.S., Tive M., Babania A., Hesani M. (2014), *Analyzing the applications of customer lifetime value (CLV) based on benefit segmentation for the banking sector*, ELSEVIER Procedia – Social and Behavioral Sciences 109, s. 590-594.
- Kotler P. (1974) *Marketing during periods of shortage*, Journal of Marketing 38(3), s. 20-29. [w:] M. Haenlein, A.M. Kaplan, J.B. Anemone (2007), *Customer Lifetime Value in a Retail Banking Context*, „European Management Journal”, Vol. 25, nr 3, s. 221-234.

- Haenlein M., Kaplan A.M., Anemone J.B. (2007), *Customer Lifetime Value in a Retail Banking Context*, „European Management Journal”, Vol. 25, nr 3, s. 221-234.
- Safari M. (2015), *Customer Lifetime Value Analysis to Profitability Management*, International Letters of Social and Humanistic Sciences 5, s. 99-108.
- Singh S.S., Jain D.C., (2013), *Measuring Customer Lifetime Value: models and analysis*, INSEAD.
- [www NBP] [http://www.nbp.pl/home.aspx?f=/systemplatniczy/analizy\\_i\\_opracowania.html](http://www.nbp.pl/home.aspx?f=/systemplatniczy/analizy_i_opracowania.html) (dostęp: 20.03.2015).
- [www GUS] <http://stat.gov.pl/obszary-tematyczne/warunki-zycia/dochody-wydatki-i-warunki-zycia-ludnosci/> (dostęp: 20.03.2015).
- [www PRNews] <http://prnews.pl/raporty/1/> (dostęp: 20.03.2015).
- [www Biznesradar] <http://www.biznesradar.pl/raporty-finansowe-rachunek-zyskow-i-strat/> (dostęp: 20.03.2015).

#### EXAMPLE OF USE OF CLV INDICATOR TO ASSESS INVESTMENT PROJECT

**Summary:** For several years, there have been observed some dynamic changes of the regulatory and technological nature, that have a large impact on margins and profitability in retail banking. With emerging market pressure for consolidation in the Polish banking sector, it is increasingly important to properly assess the investment project in the context of their valuation. One of the methods supporting the valuation of the project is the CLV (Customer Lifetime Value) approach. The paper presents different approaches to estimating CLV and describes an estimation of the indicator in the Polish market.

**Keywords:** Customer Lifetime Value, valuation of investments, decision-making.



## Krzysztof Piasecki

Uniwersytet Ekonomiczny w Poznaniu  
Wdział Informatyki i Gospodarki Elektronicznej  
Katedra Badań Operacyjnych  
k.piasecki@ue.poznan.pl

# O STOPIE ZWROTU OSZACOWANEJ PRZEZ INTUICYJNY ROZMYTY ZBIÓR PROBABILISTYCZNY<sup>1</sup>

**Streszczenie:** Rozważana jest stopa zwrotu, zdefiniowana jako rosnąca funkcja wartości przyszłej i malejąca funkcja wartości bieżącej. Niepewna wartość przyszła opisana jest za pomocą zmiennej losowej. Nieprecyzyjna wartość bieżąca jest reprezentowana przez intuicyjny zbiór rozmyty. Wtedy, zgodnie z uogólnioną zasadą rozszerzenia Zadeha, stopa zwrotu jest wyznaczona jako intuicyjny rozmyty zbiór probabilistyczny. Wyznaczona jest intuicyjna rozmyta oczekiwana stopa zwrotu oraz czterowymiarowy obraz ryzyka obarczającego tę stopę. W *Dodatku* zaprezentowano narzędzia formalne stosowane do opisu ryzyka.

**Słowa kluczowe:** stopa zwrotu, nieprecyzyjna wartość bieżąca, intuicyjny zbiór rozmyty.

## Wprowadzenie

Podstawowym przedmiotem rozważań analizy kapitałowej jest stopa zwrotu, która jest wyznaczona za pomocą wartości bieżącej (PV) i przewidywanej wartości przyszłej (FV). PV to wartość teraźniejszego ekwiwalentu płatności dostępnej w ustalonym momencie czasu.

Propozycja przedstawienia PV jako liczby rozmytej, jest już dobrze ugruntowaną ideą. Przekrojowy przegląd literatury poświęconej tej tematyce można znaleźć np. w [Piasecki, 2011a]. Tam też wykazano, że stopa zwrotu wyznaczona z zastosowaniem rozmytej PV i losowej FV jest opisana za pomocą probabi-

<sup>1</sup> Projekt został sfinansowany ze środków Narodowego Centrum Nauki przyznanych na podstawie decyzji numer DEC-2012/05/B/HS4/03543.

listycznego zbioru rozmytego [Hiroto, 1981]. Możliwości zastosowania opisanych w ten sposób stóp zwrotu do podejmowania decyzji inwestycyjnych opisano w [Piasecki, 2011a, 2011b, 2014].

W publikacji Piaseckiego [2013] przedstawiono przykład PV opisanej jako intuicyjny zbiór rozmyty. Głównym celem tego artykułu jest przedstawienie stopy zwrotu wyznaczonej z zastosowaniem intuicyjnej rozmytej PV i losowej FV. W pracy będą badane podstawowe właściwości tak przedstawianej stopy zwrotu.

## 1. Oszacowanie stopy zwrotu

Dla ustalonego horyzontu czasowego  $t > 0$  inwestycji, każdy papier wartościowy jest określony za pomocą dwóch wartości:

- przewidywanej FV  $V_t \in \mathbb{R}^+$ ,
- oszacowanej PV  $V_0 \in \mathbb{R}^+$ .

Podstawową charakterystyką informującą o korzyściach z posiadania tego instrumentu finansowego jest stopa zwrotu  $r_t$  dana za pomocą tożsamości

$$r_t = r(V_0, V_t). \quad (1.1)$$

W ogólnym przypadku funkcja  $r: \mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R}$  jest funkcją malejącą PV i funkcją rosnącą FV. Dzięki temu dla dowolnej wartości  $V_t$  możemy wyznaczyć funkcję odwrotną  $r_0^{-1}(\cdot, V_t): \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^+$ .

W klasycznym podejściu do problemu wyznaczenia stopy zwrotu wartość początkowa inwestycji jest identyfikowana z obserwowaną ceną rynkową  $\check{C}$ , co zapisujemy

$$V_0 = \check{C}. \quad (1.2)$$

Wartość przyszła inwestycji  $V_t$  jest obarczona ryzykiem niepewności co do przyszłego stanu rzeczy. Modelem formalnym tej niepewności jest przedstawianie FV jako zmiennej losowej  $\tilde{V}_t: \Omega = \{\omega\} \rightarrow \mathbb{R}^+$ . Zbiór  $\Omega$  jest zbiorem elementarnych stanów rynku finansowego. Jeżeli przy wyznaczaniu stopy zwrotu skorzystano z warunku (1.2), to wtedy także stopa zwrotu jest zmienną losową obarczoną ryzykiem niepewności. Zmienna losowa ta jest przedstawiona za pomocą tożsamości

$$\tilde{r}_t(\omega) = r(\check{C}, \tilde{V}_t(\omega)). \quad (1.3)$$

W praktyce analizy rynków finansowych przyjęto sposób opisywania ryzyka niepewności za pomocą rozkładu prawdopodobieństwa stopy zwrotu, danego za pomocą dystrybucyjności  $F_r: \mathbb{R} \rightarrow [0; 1]$ . Należy tutaj założyć, że ryzyko



niepewności obarczającej stopy zwrotu charakteryzować będzie istniejąca wariancja  $\sigma^2$  tego rozkładu. Warunkowa dystrybuanta  $F(\cdot | \check{C}): \mathbb{R}^+ \rightarrow [0; 1]$  rozkładu prawdopodobieństwa FV jest dana przez tożsamość

$$F(x | \check{C}) = F_r(r(\check{C}, x)). \quad (1.4)$$

Jak wykazano w [Piasecki, 2013], PV może być obarczone ryzykiem nieprecyzji i ryzykiem nierozstrzygalności. Wtedy oszacowanie PV jest przedstawione jako intuicyjny zbiór rozmyty:

$$V = \{(x, \mu_V(x), \nu_V(x)): x \in \mathbb{R}^+\}. \quad (1.5)$$

Stopa zwrotu jest obciążona splotem ryzyka niepewności obarczającego FV oraz ryzyka nieprecyzji i nierozstrzygalności obarczających PV. Taka stopa zwrotu jest intuicyjnym rozmytym zbiorem probabilistycznym [Zhang, Jia, Jiang, 2009]. Zgodnie z zasadą rozszerzenia Zadeha, dla każdych  $\omega \in \Omega$  funkcja przynależności  $\rho(\cdot | \omega): \mathbb{R} \rightarrow [0; 1]$  i funkcja wykluczenia  $\varphi(\cdot | \omega): \mathbb{R} \rightarrow [0; 1]$  tego zbioru są określone za pomocą zależności:

$$\begin{aligned} \rho(r | \omega) &= \max \{ \mu_V(y): y \in \mathbb{R}^+, r = r(y, \tilde{V}_t(\omega)) \} = \\ &= \mu_V(r_0^{-1}(r, \tilde{V}_t(\omega))), \end{aligned} \quad (1.6)$$

$$\begin{aligned} \varphi(r | \omega) &= \min \{ \nu_V(y): y \in \mathbb{R}^+, r = r(y, \tilde{V}_t(\omega)) \} = \\ &= \nu_V(r_0^{-1}(r, \tilde{V}_t(\omega))). \end{aligned} \quad (1.7)$$

Dla tak opisanej stopy zwrotu oczekiwana stopa zwrotu jest intuicyjnym zbiorem rozmytym:

$$R = \{(x, \rho_R(x | \check{C}), \varphi_R(x | \check{C})): x \in \mathbb{R}\}, \quad (1.8)$$

co zapisujemy  $R \in \mathcal{I}(\mathbb{R})$  i gdzie funkcje przynależności oraz wykluczenia są określone przez tożsamości

$$\rho(r | \check{C}) = \int_{-\infty}^{+\infty} \mu_V(r_0^{-1}(r, y)) dF_V(y | \check{C}), \quad (1.9)$$

$$\varphi(r | \check{C}) = \int_{-\infty}^{+\infty} \nu_V(r_0^{-1}(r, y)) dF_V(y | \check{C}). \quad (1.10)$$

W powyższym modelu szczególną uwagę zwraca fakt uzależnienia oczekiwanej stopy zwrotu od obserwowanej ceny rynkowej  $\check{C}$ . Odpowiada to praktyce podejmowania decyzji inwestycyjnych. Stąd właściwość tę możemy traktować jako pewną wartość dodaną proponowanego modelu. Tak sformułowany obraz oczekiwanej stopy zwrotu może odgrywać w analizach finansowych rynków rolę identyczną z odgrywaną tam przez oczekiwaną stopę zwrotu opisaną przez

liczbę rzeczywistą. Z drugiej strony, dzięki zastosowaniu intuicyjnego rozmytego zbioru jako modelu wartości oczekiwanej stopy zwrotu, uzyskujemy znacznie bogatszy obraz ryzyka obarczającego stopę zwrotu.

## 2. Czterowymiarowy obraz ryzyka

W klasycznych teoriach rynku finansowego stopa zwrotu jest obciążona ryzykiem niepewności, które jest odzwierciedleniem braku wiedzy inwestora o przyszłych stanach rynku finansowego. Brak tej wiedzy powoduje brak pewności u inwestora co do przyszłych zysków lub strat. W naszym modelu ryzyko niepewności oceniamy za pomocą wariancji  $\sigma^2$  rozkładu stopy zwrotu danego za pomocą dystrybuanty  $F_r: \mathbb{R} \rightarrow [0; 1]$ .

W poprzednim rozdziale zaproponowano model oczekiwanej stopy zwrotu uwzględniający wpływ bieżącej ceny rynkowej. W ten sposób podniesiono wartość poznawczą opisu instrumentu finansowego. Przyrost użyteczności tego opisu ma jednak swoją cenę. Jest nią ujawnienie ryzyka nieprecyzji i ryzyka nierozstrzygalności obarczających rozważany instrument.

Ryzyko nieprecyzji związane z nieprecyzyjnością informacji wykorzystywanej przy podejmowaniu decyzji. Wielu badaczy przedmiotu w obrazie nieprecyzji informacji wyróżnia nieostrość oraz wieloznaczność informacji<sup>2</sup>. Wieloznaczność informacji interpretujemy jako brak jednoznacznego wyróżnienia rekomendowanej alternatywy spośród wielu rozważanych. Nieostrość informacji można sformułować jako brak jednoznacznego rozróżnienia pomiędzy daną informacją a jej zaprzeczeniem.

Zatem na ryzyko nieprecyzji składa się ryzyko niejednoznaczności i nieostrości. Powstaje pytanie, czy z punktu widzenia potrzeb procesów inwestycyjnych są to ryzyka istotne.

Inwestor część odpowiedzialności za podejmowane przez siebie inwestycje przerzuca na doradców lub na stosowane narzędzia analityczne. Z tego powodu inwestor w znakomitej części ogranicza swoje wybory decyzji inwestycyjnych do alternatyw rekomendowanych przez doradców lub stosowane instrumentarium analityczne. W ten sposób inwestor minimalizuje ryzyko osobistej odpowiedzialności za podjętą decyzję finansową [zob. Piasecki, 1990].

Wzrost ryzyka wieloznaczności oznacza, że będzie się powiększać ilość alternatywnych rekomendacji inwestycyjnych. Powoduje to wzrost ryzyka wybrania spośród rekomendowanych alternatyw takiej decyzji finansowej, która *ex post* zostanie obciążona odpowiedzialnością za utracone szanse.

---

<sup>2</sup> Zobacz na przykład [Klir, 1993].

Właściwym narzędziem pomiaru ryzyka wieloznaczności jest zaproponowana przez de Luca i Terminiego [1979] miara energii. Dla naszych dalszych celów aplikacyjnych wystarczającym jest określenie miary energii jako znormalizowanej miary danej za pomocą tożsamości (A.12). Ryzyko wieloznaczności obarczające oczekiwaną stopę zwrotu  $R \in \mathcal{I}(\mathbb{R})$  oceniać będziemy za pomocą miary energii  $d(R)$  zdefiniowanej następująco:

$$d(R) = m(R), \quad (2.1)$$

gdzie znormalizowana miara  $m(\cdot)$  jest dana przez tożsamość (A.12).

Wzrost ryzyka nieostrości oznacza zacieranie się granic wyróżniających rekomendowane alternatywy inwestycyjne. Powoduje to, że wzrastają szanse wyboru alternatywy nierekomendowanej. W ten sposób wzrost ryzyka niewyraźności wpływa na przyrost istotnego ryzyka osobistej odpowiedzialności inwestora.

Właściwym narzędziem do pomiaru nieostrości informacji reprezentowanej przez zbiór rozmyty jest miara entropii [zob. więcej Bierdosian, Xie, 1984] zaproponowana przez de Luca i Terminiego [1972]. Kacprzyk i Szmidt [2001] miary te uogólnili do przypadku informacji reprezentowanych przez intuicyjne zbiory rozmyte.

W literaturze przedmiotu znajdujemy szereg propozycji miar entropii zbiorów rozmytych. Propozycje te podzielić można z grubsza na dwie grupy. W pierwszej z nich znajdujemy te miary entropii, w których definicjach skorzystano ze znajomości przebiegu zmienności pewnych specyficznych funkcji. Jedynym uzasadnieniem wprowadzenia tych miar entropii było spełnianie przez nie warunków aksjomatycznej definicji miary entropii [de Luca, Termini, 1979].

Drugą grupą miar entropii są miary zdefiniowane na podstawie pewnych intuicyjnych przesłanek. Przesłanki te wynikają z przekonania, że miara entropii powinna być funkcją odległości pomiędzy pewnymi zbiorami. Poszczególne propozycje miary entropii różniły się wskazaniem pary porównywanych zbiorów. Autorzy, omawiając swoje propozycje określenia miary entropii, przedstawiali przesłanki uzasadniające merytorycznie dokonany wybór pary porównywanych zbiorów.

Kaufmann [1975] zaproponował, aby jako miernik entropii zbioru rozmytego przyjąć jego zbieżność do najbardziej podobnego zbioru klasycznego. Czogała, Gottwald i Pedrycz [1981] eksponują przesłankę mówiącą, że niewyraźne określenie przynależności elementów do zbioru rozmytego powoduje niespełnianie prawa wyłączonego środka. Wynika z tego ich propozycja, aby miarę entropii zbioru rozmytego  $A \in \mathcal{F}(\mathbb{R})$  rozumieć jako odległość zbioru  $A \cap A^C$  od zbioru

pustego  $\emptyset$ . Wychodząc z tych samych przesłanek co powyżej, miarę entropii zbioru rozmytego  $A \in \mathcal{F}(\mathbb{R})$  można rozumieć jako odległość zbioru  $A \cup A^C$  od przestrzeni liczb rzeczywistych  $\mathbb{R}$ . Innym ujęciem miar entropowych jest ujęcie zaproponowane przez Yagera [1979]. Jego zdaniem miara entropii zbioru rozmytego  $A \in \mathcal{F}(\mathbb{R})$  powinna być oceną rozróżnialności pomiędzy zbiorem  $A$  i jego dopełnieniem  $A^C$ . Oczywistą przesłanką tak rozumianego pojęcia miary entropii jest fakt, że im zbiór rozmyty jest mniej wyraziście określony, tym bardziej jest podobny do swego dopełnienia. Zatem miara entropii powinna być malejącą funkcją odległości pomiędzy zbiorami rozmytymi  $A$  i  $A^C$ . Po prostych przekształceniach łatwo można wykazać, że przy przyjętych w *Dodatku* założeniach, wszystkie zdefiniowane powyżej miary entropii są identyczne [Piasecki, 1990].

Pełnej syntezy tych postulatów dokonał Kosko [1991], który stwierdził, że entropia informacji, reprezentowanej przez podzbiór rozmyty  $A \in \mathcal{F}(\mathbb{R})$ , powinna maleć wraz ze wzrostem podobieństwa zbioru  $A \cap A^C$  do zbioru pustego  $\emptyset$  i zmniejszaniem się podobieństwa zbioru  $A \cup A^C$  do przestrzeni liczb rzeczywistych  $\mathbb{R}$ . Oba te postulaty stanowiły przesłanki do sformułowania kolejnej propozycji miary entropii. Ze względu na dobre syntetyczne uzasadnienie oraz uniwersalizm, zaproponowana przez Kosko miara entropii jest w tej chwili powszechnie stosowana. Poszczególne jej implementacje różnią się jedynie zastosowanym rodzajem miary energii zbiorów rozmytych. Różnice te wynikają na ogół z koniecznego dostosowania miary do właściwości przestrzeni, z której pochodziły oceniane zbiory rozmyte. Miarę entropii Kosko łatwo można uogólnić do przypadku informacji reprezentowanych przez intuicyjne zbiory rozmyte. Dzięki temu miarę tę wykorzystamy do oceny ryzyka nieostrości obarczającej oczekiwaną stopę zwrotu  $R \in \mathcal{I}(\mathbb{R})$ . Ryzyko to można ocenić za pomocą miary entropii  $e(R)$  określonej za pomocą tożsamości:

$$e(A) = \frac{m(A \cap A^C)}{m(A \cup A^C)}. \quad (2.2)$$

Nierozstrzygalność informacji interpretuje się jako brak możliwości pełnej wiedzy o zarekomendowaniu lub odrzuceniu poszczególnych alternatyw. Z tej przyczyny nierozstrzygalność może być identyfikowana z niepewnością w ujęciu Knighta [1921].

Wzrost ryzyka nierozstrzygalności oznacza spadek odpowiedzialności za dokonany wybór, jaką inwestor może przenieść na doradcę lub stosowany aparat analityczny. W ten sposób automatycznie wzrasta osobista odpowiedzialność inwestora za podjętą decyzję.

Właściwym narzędziem do pomiaru nierozstrzygalności informacji reprezentowanej przez intuicyjny zbiór rozmyty jest miara entropii zdefiniowana przez Burillo i Bustince [1996]. W tej pracy, dla podkreślenia faktu, że ta charakterystyka służy do pomiaru zjawiska odmiennego od zjawiska mierzonego przez miarę entropii de Luca i Terminiego [1972], dla funkcjonału spełniającego warunki narzucone przez Burillo i Bustince [1996] proponuje się odmienną nazwę miary ignorancji. Ryzyko nierozstrzygalności obarczające oczekiwaną stopę zwrotu  $R$  oceniać będziemy za pomocą miary ignorancji  $k(R)$  zdefiniowanej w [Piasecki, 2015] za pomocą tożsamości

$$k(R) = m(\Diamond R) - m(\Box R), \quad (2.3)$$

gdzie zbiory rozmyte  $\Box R$  i  $\Diamond R$  zostały zdefiniowane przez tożsamości (A.4) i (A.5).

Przeprowadzona w tym rozdziale dyskusja dowodzi, że wzrost ryzyka nieprecyzji lub ryzyka nierozstrzygnięcia istotnie pogarsza warunki inwestowania. Posługiwanie się czterowymiarowym obrazem ryzyka  $(\sigma^2, d(R), e(R), k(R))$  ułatwia równoczesne zarządzanie ryzykiem niepewności, nieprecyzji i nierozstrzygalności. Pożądanym tutaj działaniem jest minimalizacja każdej z czterech ocen ryzyka.

Powstaje natychmiast kolejne pytanie, czy takie poszerzenie oceny ryzyka jest celowe.

W [Piasecki, 2011a] pokazano, że ryzyko niepewności i nieprecyzji jest skorelowane ujemnie, natomiast w kolejnej publikacji [Piasecki, 2015] ukazano, że także ryzyko nieostrości i nierozstrzygalności może być skorelowane ujemnie. Oznacza to, że zawsze istnieje możliwość ograniczenia ryzyka niepewności prognozy poprzez odpowiednie obniżenie jakości informacji zawartej w tej prognozie. Jedynie kontrola wszystkich ocen jakości informacji zawartej w prognozie pozwoli na uniknięcie zaniżonych ocen ryzyka niepewności.

Po drugie, uwzględnienie ryzyka nieprecyzji i nierozstrzygalności pozwoli odrzucać te spośród wariantów inwestycyjnych, które co prawda są atrakcyjne z punktu widzenia klasycznej teorii Markowitza, ale niestety zebrane na ich temat informacje są niskiej jakości.

## A. Dodatek

W celu nadania powyższym rozważaniom jednoznacznego charakteru, zostaną przedstawione tutaj wybrane podstawowe pojęcia teorii rozmytych zbiorów intuicyjnych. Ze względu na zakres tych rozważań opis intuicyjnych zbiorów rozmytych ograniczymy do przypadku podzbiorów przestrzeni liczb rzeczywistych  $\mathbb{R}$ .

Punktem odniesienia do tego opisu jest rodzina  $\mathcal{F}(\mathbb{R})$  wszystkich rozmytych przestrzeni  $\mathbb{R}$ . Każdy podzbiór rozmyty  $A \in \mathcal{F}(\mathbb{R})$  jest opisany za pomocą swej funkcji przynależności  $\mu_A \in [0,1]^{\mathbb{R}}$ . W ujęciu logik wielowartościowych, wartość  $\mu_A(x)$  funkcji przynależności jest interpretowana jako wartość logiczna zdania  $x \in A$ .

Atanassov [1985] zdefiniował pojęcie intuicyjnego zbioru rozmytego (w skrócie: IFS)  $A$  jako zbioru trójek uporządkowanych

$$A = \{(x, \mu_A(x), \nu_A(x)) : x \in \mathbb{R}\}, \quad (\text{A.1})$$

gdzie funkcja wykluczenia  $\nu_A \in [0,1]^{\mathbb{R}}$  spełnia tożsamościowo warunek

$$\nu_A(x) \leq 1 - \mu_A(x). \quad (\text{A.2})$$

W ujęciu logik wielowartościowych, wartość  $\nu_A(x)$  funkcji wykluczenia jest interpretowana jako wartość logiczna zdania  $x \notin A$ . Za pomocą symbolu  $\mathcal{I}(\mathbb{R})$  oznaczamy rodzinę wszystkich IFS przestrzeni  $\mathbb{R}$ .

Korzystając z określonych powyżej funkcji przynależności i wykluczenia, możemy teraz za pomocą tożsamości

$$\pi_A(x) = 1 - \mu_A(x) - \nu_A(x) \quad (\text{A.3})$$

określić funkcję nierozstrzygnięcia  $\pi_A \in [0,1]^{\mathbb{R}}$ . Wartość  $\pi_A(x)$  określa stopień naszego niezdecydowania co do oceny wzajemnych relacji pomiędzy elementem  $x \in \mathbb{R}$  a  $A \in \mathcal{I}(\mathbb{R})$ . Z tej przyczyny funkcja nierozstrzygnięcia  $\pi_A$  może być interpretowana jako obraz niepewności w ujęciu Knighta [1921].

Za Atanassovem [1993], dla dowolnego IFS  $A \in \mathcal{I}(\mathbb{R})$  określamy największy zbiór rozmyty  $\Box A \subset A$  i najmniejszy zbiór rozmyty  $\Diamond A \supset A$ . Mamy tutaj

$$\Box A = \{(x, \mu_A(x), 1 - \mu_A(x)) : x \in \mathbb{R}\}, \quad (\text{A.4})$$

$$\Diamond A = \{(x, 1 - \nu_A(x), \nu_A(x)) : x \in \mathbb{R}\}. \quad (\text{A.5})$$

Rozważmy teraz dowolny zbiór rozmyty  $\tilde{Z}$  opisany za pomocą swej funkcji przynależności  $\mu_Z \in [0,1]^{\mathbb{R}}$ . Taki zbiór rozmyty można identyfikować z IFS reprezentowanym przez zbiór trójek uporządkowanych

$$Z = \{(x, \mu_Z(x), 1 - \mu_Z(x)) : x \in \mathbb{R}\}, \quad (\text{A.6})$$

Funkcja nierozstrzygnięcia powyższego IFS spełnia tożsamościowo warunek

$$\pi_Z(x) = 0. \quad (\text{A.7})$$

Wynika z tego, że stosowanie zbiorów rozmytych do tworzenia modeli obiektów realnych oznacza przyjęcie *implicite* silnego założenia głoszącego, że zawsze potrafimy rozstrzygnąć niepewność co do spełniania przez każdy stan

elementarny stawianych mu wymagań. Jak wiemy jednak z potocznej obserwacji, na ogół tak nie jest i nasze rozstrzygnięcia są obarczane zauważalnym marginesem niezdecydowania. Oznacza to, że rozszerzenie klasy zbiorów rozmytych do klasy IFS w istotny sposób wzbogaca możliwości rzetelnego opisu nieprecyzji. Droga do uzyskania tego rozszerzenia jest dość łatwa, gdyż klasa IFS w chwili obecnej posiada już bogate i wszechstronne opracowanie teoretyczne [np. Atanassov, 1999].

Dla dowolnych  $A, B \in \mathcal{I}(\mathbb{R})$  działania teoriomnogościowe i relacje pomiędzy IFS są zdefiniowane w następujący sposób:

$$A^c = \{(x, v_A(x), \mu_A(x)) : x \in \mathbb{X}\}, \quad (\text{A.8})$$

$$A \cup B = \{(x, \mu_A(x) \vee \mu_B(x), v_A(x) \wedge v_B(x)) : x \in \mathbb{X}\}, \quad (\text{A.9})$$

$$A \cap B = \{(x, \mu_A(x) \wedge \mu_B(x), v_A(x) \vee v_B(x)) : x \in \mathbb{X}\}. \quad (\text{A.10})$$

W przeprowadzonych rozważaniach podstawowym narzędziem pomiaru będzie miara zbioru rozmytego zaproponowana przez Khalili'ego [1979]. Miarę tę można uogólnić do przypadku dowolnego IFS. Wtedy miarą  $A \in \mathcal{I}(\mathbb{R})$  jest wartość

$$w(A) = \int_{-\infty}^{+\infty} \mu_A(x) dx. \quad (\text{A.11})$$

Stosuje się ją do zdefiniowania unormowanej miary IFS określonej dla  $A \in \mathcal{I}(\mathbb{R})$  przez zależność:

$$m(A) = \frac{w(A)}{1+w(A)} = \lim_{y \rightarrow +\infty} \frac{\int_{-y}^y \mu_A(x) dx}{1 + \int_{-y}^y \mu_A(x) dx}. \quad (\text{A.12})$$

Dodatkowo znormalizowana miara IFS może nam posłużyć do wyznaczenia metryki na rodzinie  $\mathcal{I}(\mathbb{R})$ . Zgodnie z sugestią zawartą w [Kaufmann, 1975] to odległość Hamminga dana dla dowolnej pary  $A, B \in \mathcal{I}(\mathbb{X})$  przez odległość

$$\delta(A, B) = m(A \cup B) - m(A \cap B). \quad (\text{A.11})$$

## Podsumowanie

Przeprowadzona w pracy dyskusja nad modelem stopy zwrotu stanowi kontynuację badań zainicjowanych w [Piasecki, 2011a] nad problematyką nieprecyzyjnej stopy zwrotu. Z punktu widzenia teorii finansów, nowym elementem w tej dyskusji stało się ryzyko nierozstrzygalności. Pomimo tej modernizacji, całą bogatą empiryczną wiedzę zebraną na temat obarczającego stopy zwrotu ryzyka niepewności można wykorzystać w zaproponowanym modelu. Jest to wysoce

korzystna cecha zaproponowanego modelu, gdyż przybliża możliwość jego realnych zastosowań.

Uzyskane tutaj wyniki stanowią podstawę do uogólnienia normatywnej teorii decyzji finansowych opisanej w [Piasecki, 2011a, 2011b, 2014].

## Literatura

- Atanassov K., Stoeva S. (1985), *Intuitionistic fuzzy sets*, [w:] J. Albrycht, H. Wiśniewski (red.), *Proceedings of Polish Symposium on Interval and Fuzzy Mathematics*, Poznań.
- Atanassov K. (1993), *New variant of modal operators in intuitionistic fuzzy modal logic*, „BUSEFAL”, nr 54.
- Atanassov K. (1999), *Intuitionistic Fuzzy Sets*, Springer-Verlag, Heidelberg.
- Biedrosian S.D., Xie W.X. (1984), *An information measure for fuzzy sets*, „IEEE Trans. on Systems, Man and Cybernetics”, nr 14.
- Burillo P., Bustince H. (1996), *Entropy on intuitionistic fuzzy sets and on interval-valued fuzzy sets*, „Fuzzy Sets and Systems”, nr 78.
- Czogala E., Gottwald S., Pedrycz W. (1982), *On the concepts of measures of fuzziness and their applications in decision making*, 8<sup>th</sup> triennial World Congress IFAC, Kyoto.
- Hiroto K. (1981), *Concepts of probabilistic sets*, „Fuzzy Sets and Systems”, nr 5.
- Kaufmann A. (1975), *Introduction to the Theory of Fuzzy Subsets, vol. I, Fundamental Theoretical Elements*, Academic Press, New York.
- Khalili S. (1979), *Fuzzy measures and mappings*, „J. Math. Anal. Appl.”, nr 68.
- Klir G.J. (1993), *Developments in uncertainty-based information*, [w:] M. Yovits (red.), *Advances in Computers* 36, Academic Press, San Diego.
- Kosko B. (1986), *Fuzzy entropy and conditioning*, Inform Sciences, nr 40.
- de Luca A., Termini S. (1972), *A definition of a non-probabilistic entropy in the settings of fuzzy set theory*, „Inform. and Control”, nr 20.
- de Luca A., Termini S. (1979), *Entropy and energy measures of fuzzy sets*, „Advances in fuzzy set theory and applications”, nr 20.
- Knight F.H. (1921), *Risk, Uncertainty, and Profit*, Hart, Schaffner & Marx; Houghton Mifflin Company, Boston.
- Piasecki K. (1990), *Decyzje i wiarygodne prognozy*, Zeszyty Naukowe S.I, z. 106, Wydawnictwo Akademii Ekonomicznej w Poznaniu, Poznań.
- Piasecki K. (2011a), *Effectiveness of securities with fuzzy probabilistic return*, „Operations Research and Decisions”, nr 21(2).
- Piasecki K. (2011b), *Rozmyte zbiory probabilistyczne jako narzędzie finansów behawioralnych*, Wyd. UE, Poznań. DOI: 10.13140/2.1.2506.6567.



- Piasecki K. (2013), *Intuitionistic assessment of behavioural present value*, „Folia Oeconomica Stetinensia”, nr 13(21)(2), DOI: 10.2478/fofi-2013-0021.
- Piasecki K. (2014), *On imprecise investment recommendations*, „Studies in Logic, Grammar and Rhetoric”, nr 37(50). DOI: 10.2478/slrg-2014-0024.
- Piasecki K. (2015), *Some remarks on axiomatic definition of entropy measure*, praca złożona do druku.
- Szmidt E.J., Kacprzyk J. (2001), *Entropy for intuitionistic fuzzy sets*, „Fuzzy Sets and Systems”, nr 118.
- Yager R.R. (1979), *On the measure on fuzziness and negation, Part I, Membership in the unit interval*, School of Business Administration Rep. RRY 79-10-16., New Rochelle.
- Zhang Q., Jia B., Jiang S. (2009), *Interval-valued intuitionistic fuzzy probabilistic set and some of its important properties*, Proceedings of the 1st International Conference on Information Science and Engineering ICISE2009, Guangzhou.

#### ON RETURN RATE ESTIMATED BY INTUITIONISTIC FUZZY PROBABILISTIC SET

**Summary:** The return rate is determined here by present value given as intuitionistic fuzzy subset and by anticipated future value given as a random variable. In this way using the Zadeh's extension principle, we obtain return rate described by an intuitionistic fuzzy probabilistic set. For this case expected return rate is calculated as an intuitionistic fuzzy subset in the real line. Four-dimensional risk image is introduced. In the Appendix we discuss formal tools which are applied for describing risk.

**Keywords:** return rate, imprecise present value, intuitionistic fuzzy set.



**Marcin Salamaga**

Uniwersytet Ekonomiczny w Krakowie  
Wydział Zarządzania  
Katedra Statystyki  
salamaga@uek.krakow.pl

## ANALIZA DETERMINANTÓW WYBORU KIERUNKÓW EKSPORTU Z WYKORZYSTANIEM DRZEW DECYZYJNYCH

**Streszczenie:** Celem artykułu jest identyfikacja i hierarchizacja czynników decydujących o wyborze geograficznych kierunków przeznaczenia eksportu przedsiębiorstw działających w Polsce. Przedmiotem badania są czynniki o charakterze rynkowym, prawnym, społeczno-kulturowym, technologicznym i politycznym, które mogą mieć znaczenie przy poszukiwaniu zewnętrznych rynków zbytu. W artykule posłużono się danymi pochodzącymi z badania ankietowego przeprowadzonego wśród eksporterów. Do klasyfikacji firm eksportujących swoje towary zastosowano drzewa decyzyjne tworzone zgodnie z procedurą CART.

Narzędzia te umożliwią stworzenie profili przedsiębiorstw o zbliżonej polityce eksportowej w zakresie priorytetów przy wyborze partnerów handlowych. Wyniki takiego badania mogą stanowić wsparcie w identyfikacji i opisie czynników rozwoju polskiego eksportu.

**Słowa kluczowe:** eksport, rynek, drzewa klasyfikacyjne, algorytm CART.

### Wprowadzenie

Jednym z ważniejszych wyznaczników otwartości gospodarki w dobie wszechobecnej globalizacji jest poziom eksportu i jego dynamika. W ostatnich latach aktywność eksportowa polskich przedsiębiorstw odnotowuje trwały wzrost pomimo ograniczenia dostępu do części rynku Europy Wschodniej, spowodowanego międzynarodową sytuacją polityczną<sup>1</sup>. Według danych GUS wartość polskiego eksportu w 2014 r. wyniosła 163,1 mld euro, co oznacza wzrost

<sup>1</sup> W 2014 r. Rosja wprowadziła embargo na część produktów pochodzących z Polski i innych krajów Unii Europejskiej.

o ok. 5,2% w stosunku do roku poprzedniego [www 1]. Optymistyczne wskaźniki eksportu w ujęciu globalnym mogą wskazywać na rosnącą konkurencyjność polskich przedsiębiorstw oraz na ich duże zdolności adaptacyjne w dostosowywaniu się do dynamicznie zmieniającego się międzynarodowego otoczenia gospodarczego. Jednocześnie wiele firm boryka się z problemem poszukiwania nowych rynków zbytu, które pozwolą na wzrost skali produkcji i dalszy ich rozwój. O ile motywy podejmowania działalności eksportowej są dobrze wyjaśnione na gruncie różnych teorii ekonomii (teorii handlu zagranicznego) i badań empirycznych [Hagemejer, 2006; Białecki, Kaczmarek, 2008; Puchalska, 2010; Nemkova i in., 2012], o tyle kompleksowe badania nad kryteriami wyboru przez polskie firmy zewnętrznych rynków przeznaczenia eksportu są prowadzone rzadziej. Przedmiotowa problematyka jest częściowo podjęta m.in. w pracach Karasek [2013] czy Kłysik-Uryszek i Serwacha [2015]. Tymczasem dynamicznie zmieniająca się sytuacja polityczna i gospodarcza na świecie powoduje, że konieczne są ciągle nowe, aktualne badania determinantów wyboru kierunków przeznaczenia eksportu, gdyż preferowane przez przedsiębiorstwa kierunki eksportu oraz hierarchia motywów ich wyboru może się zmieniać w czasie. Wychodząc naprzeciw tym oczekiwaniom, autor w niniejszym artykule przedstawia wyniki badania polskich przedsiębiorstw w zakresie perspektywicznych kierunków eksportu i motywów ich wyboru. Ważnym powodem prowadzenia tego typu badań jest również aktualna sytuacja wielu przedsiębiorstw (np. w branży rolno-spożywczej), które zmuszone są szukać nowych rynków zbytu w związku z obowiązującym rosyjskim embargiem na część towarów pochodzących z Polski.

Celem artykułu jest identyfikacja i hierarchizacja czynników decydujących o wyborze geograficznych kierunków przeznaczenia eksportu przedsiębiorstw działających w Polsce. W opracowaniu posłużono się wynikami z badania sondażowego, które zostało przeprowadzone wśród polskich eksporterów. Przedmiotem badania są czynniki o charakterze rynkowym, prawnym, politycznym, technologicznym i kulturowym, które mają znaczenie przy poszukiwaniu zewnętrznych rynków zbytu. W artykule utworzono profile przedsiębiorstw o zbliżonej polityce eksportowej w zakresie priorytetów przy wyborze partnerów handlowych.

W tym celu zastosowano drzewa decyzyjne tworzone zgodnie z procedurą CART. Wyniki przedstawione w artykule mogą stanowić pomoc dla przedsiębiorstw w poszukiwaniu zewnętrznych rynków, ale także mogą być wsparciem w identyfikacji i opisie czynników rozwoju polskiego eksportu.

## 1. Metoda badania

Identyfikację czynników determinujących wybór perspektywicznych kierunków eksportu przeprowadzono, stosując algorytm drzew klasyfikacyjnych i regresyjnych CART (*Classification and Regression Trees*) [Breiman i in., 1984]. Przedmiotowa procedura umożliwia generowanie drzew decyzyjnych, czyli grafów o strukturze drzewiastej.

Tego typu drzewa składają się z węzła początkowego (korzenia), węzłów podlegających podziałowi na węzły potomne oraz węzłów końcowych (liści). Jeżeli zmienna zależna jest mierzona na skali nominalnej lub porządkowej, to mówimy o drzewach klasyfikacyjnych. Jeśli natomiast zmienna zależna jest mierzona na skali co najmniej przedziałowej, to mamy do czynienia z drzewami regresyjnymi. Drzewa decyzyjne umożliwiają podział wielowymiarowej przestrzeni zmiennych na  $K$  rozłączne podzbiory zgodnie z funkcją klasyfikacyjną [Gatnar, 2009]:

$$f(x_i) = \sum_{k=1}^K \alpha_k I(x_i \in R_k), \quad (1)$$

gdzie:

$R_k$  ( $k=1,2,\dots,K$ ) – podprzestrzeń przestrzeni  $X^m$ ,

$\alpha_k$  – parametry modelu,

$I$  – funkcja wskaźnikowa przyjmująca wartość 1 (gdy  $x_i \in R_k$ ) lub 0 (gdy  $x_i \notin R_k$ ).

Sposób szacowania parametrów  $\alpha_k$  zależy od skali, na jakiej mierzona jest zmienna zależna  $Y$ .

Jeśli zmienna  $Y$  jest mierzona na skali nominalnej, to:

$$\alpha_k = \arg \max_t p(P_t | x_i \in R_k), \quad (2)$$

gdzie:

$P_t$  ( $t=1,2,\dots,u$ ) – klasa, do której należy obserwacja  $x_i$ .

W przypadku gdy zmienna  $Y$  jest mierzona na skali co najmniej przedziałowej, to parametr  $\alpha_k$  jest średnią wartością zmiennej  $Y$  dla obserwacji znajdujących się w podprzestrzeni  $R_k$ :

$$\alpha_k = \frac{\sum_{x_i \in R_k} y_i}{n_k}, \quad (3)$$

gdzie

$n_k$  – liczba obserwacji w podprzestrzeni  $R_k$ .

Aby ocenić jakość podziału przestrzeni  $R$  na rozłączne segmenty  $R_1, R_2, \dots, R_k$  można wykorzystać funkcję [Gatnar, 2009]:

$$\Delta Q(R) = Q(R) - \sum_{s=1}^K Q(R_k) p_k, \quad (4)$$

gdzie:

$Q(R_k)$  – funkcja zróżnicowania obserwacji znajdujących się w podprzestrzeni  $R_k$ ,

$p_k$  – frakcja obserwacji w podprzestrzeni  $R_k$ .

Wyrażenie (4) jest maksymalizowane (funkcja  $Q(R_k)$  jest minimalizowana), co zapewnia możliwie najwyższą jednorodność wydzielanych podprzestrzeni.

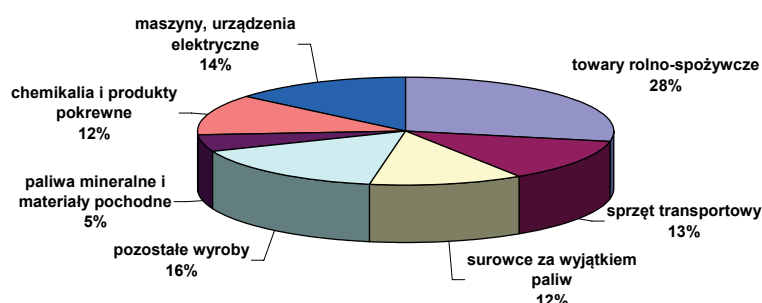
Postać funkcji  $Q(R_k)$  zależy od rodzaju tworzonego drzewa decyzyjnego. W przypadku drzew klasyfikacyjnych do oceny homogeniczności podprzestrzeni  $R_k$  stosuje się przeważnie błąd klasyfikacji, wskaźnik Giniego lub miarę entropii. W procesie budowy drzew dyskryminacyjnych każda ze zmiennych metrycznych jest poddawana dyskretyzacji [Gatnar 2009], w wyniku czego jej wartości są dzielone pomiędzy dwoma rozłącznymi przedziałami, po czym wybierana jest ta zmienna, która maksymalizuje kryterium (4). W konsekwencji każdy węzeł drzewa dyskryminacyjnego ma dwa węzły potomne. Jeśli zmienna  $X$  jest mierzona na słabej skali, to zbiór jej kategorii jest dzielony na takie dwa podzbiory, aby wartość wyrażenia (4) była największa.

W strukturze drzew dyskryminacyjnych niepożądanym zjawiskiem jest nadmierna złożoność modelu, czemu towarzyszy wzrost wartości błędu dla zbioru testowego. Praktycznym sposobem przeciwdziałania temu zjawisku jest przycinanie krawędzi (*pruning*). Redukcja rozmiarów drzewa jest procesem sekwencyjnym, w wyniku którego eliminowane są te gałęzie drzewa, których brak nie skutkuje nadmiernym pogorszeniem jakości podziałów, monitorowanej za pomocą kryterium (4). Ostatecznie powstaje zbiór drzew, z których wybierane jest to, dla którego błąd klasyfikacji dotyczący zbioru testowego jest minimalny [Gatnar, 2001].

W interpretacji określonego liścia drzewa dyskryminacyjnego CART wykorzystuje się sekwencję reguł klasyfikacyjnych utworzonych dla ścieżki drzewa łączącej korzeń z tym liściem. Jednym z powodów wyboru analizy CART do klasyfikacji eksporterów jest jej efektywność w predykcji jakościowej, w przypadku której stosowalność wielu innych metod ilościowych jest ograniczona. Ponadto analiza CART jest odporna na występowanie jednostek nietypowych, nie wymaga liniowości związków pomiędzy zmiennymi i dopuszcza wykorzystanie zmiennych charakteryzujących się brakami danych [Gatnar, 2001].

Źródło: Opracowanie własne na podstawie wyników badania ankietowego przeprowadzonego w okresie od listopada 2013 r. do kwietnia 2014 r.

Na rys. 2 przedstawiono branżową strukturę ankietowanych firm eksportujących swoje produkty. Wyróżnione branże (grupy towarowe) nawiązują do nomenklatury międzynarodowej standardowej klasyfikacji handlu<sup>2</sup> (SITC – *Standard International Trade Classification*). Wśród badanych firm największą reprezentację miały przedsiębiorstwa rolno-spożywcze (28%), przedsiębiorstwa wytwarzające pozostałe wyroby (16%) oraz firmy produkujące maszyny i urządzenia elektryczne (14%). Ankietowane przedsiębiorstwa były również badane pod względem poziomu udziału swojej produkcji, którą przeznaczają na eksport. Z badania wynika, że 32% firm przeznaczą na eksport od 40% do 60% swojej produkcji, a 11% firm eksportuje ponad 60% towarów. Stosunkowo dużą grupę stanowiły też firmy, które za granicę wysyłają od 20% do 40% wyrobów (36% firm).



**Rys. 2.** Struktura branżowa ankietowanych przedsiębiorstw eksportowych

Źródło: Opracowanie własne na podstawie wyników badania ankietowego przeprowadzonego w okresie od listopada 2013 r. do kwietnia 2014 r.

Z punktu widzenia celu artykułu istotne jest rozpoznanie struktury wskazań czynników, które mogą wpływać na wybór kierunku eksportu towarów przez polskich przedsiębiorców. Czynniki sprzyjające rozwojowi handlu zagranicznego, jak również go warunkujące, są stosunkowo szeroko opisywane w literaturze przedmiotu [Białecki, Kaczmarek, 2008; Nemkova i in.; Kłysik-Uryszek i Serwacha, 2015]. Część z nich ma charakter uniwersalny, a inne są typowe dla pewnych rodzajów towarów specyficznych dla określonych branż. Podstawo-

<sup>2</sup> Międzynarodowa standardowa klasyfikacja handlu obejmuje dziesięć grup towarów (nr 0-9), które podlegają podziałowi na dalsze podgrupy. Z uwagi na słabą reprezentację firm w niektórych grupach klasyfikacji SITC zdecydowano się na połączenie grup *żywność i żywe zwierzęta* (0), *tytoń i napoje* (2), *oleje i tłuszcze* (4) w jedną grupę: *towary rolno-spożywcze*. Z podobnego powodu połączono grupy *podstawowe artykuły przemysłowe klasyfikowane według materiałów* (6), *inne wyroby przemysłowe* (8) oraz *inne wyroby gdzie indziej niesklasyfikowane* (9) w jedną grupę: *pozostałe wyroby*. Z kolei z uwagi na znaczną nadreprezentację firm w grupie maszyny, urządzenia i środki transportu (7) wydzielono z niej dwie grupy: *maszyny i urządzenia* oraz *środki transportu*.

wym motywem działalności większości firm w gospodarce wolnorynkowej jest maksymalizacja zysku, co można osiągnąć m.in. na drodze ekspansji firmy na rynki zagraniczne (zwłaszcza w sytuacji, gdy dalsze zwiększanie sprzedaży na rynku krajowym staje się trudniejsze). Eksport stwarza więc szanse na zdobycie nowych klientów, wzrost dochodów i często ma znaczenie prestiżowe dla firmy.

O wyborze zewnętrznych rynków zbytu często decydują również powody inne niż ekonomiczne. Spośród różnych czynników, o jakie pytano respondentów, zdecydowano się ostatecznie na uwzględnienie w niniejszej analizie pięciu grup czynników: rynkowych, społeczno-kulturowych, prawnych, technologicznych oraz politycznych [por. Bąk, 2014]. Takie wieloaspektowe podejście do motywów wyboru importera wydaje się uzasadnione zwłaszcza wobec niestabilnej sytuacji gospodarczej i politycznej na świecie w ostatnich latach. Jest więc naturalne, że eksporter oprócz kryteriów czysto ekonomicznych musi brać pod uwagę również inne czynniki, których znajomość pozwoli na zminimalizowanie ryzyka w eksporcie (ekonomicznego, gospodarczego, politycznego, kursowego, stopy procentowej, kredytowego i innych). W ramach każdej z wyróżnionych grup determinantów ankietowany eksporter miał do wyboru jeden z dwóch czynników, który jego zdaniem w większym stopniu jest brany pod uwagę przy wyborze kierunku eksportu. Tabela 1 zawiera bezwzględne liczby wskazań oraz odsetki wskazań poszczególnych determinantów kierunku eksportu towarów. Wśród determinantów rynkowych respondenci najczęściej wskazywali na *poziom zamożności gospodarstw domowych w kraju importera* jako na wiodący czynnik wyboru kraju importera. Wśród determinantów społeczno-kulturowych takim głównym powodem są *dysproporcje ekonomiczne w społeczeństwie i zakres ubóstwa w kraju importera*; wśród czynników prawnych – *prawodawstwo gospodarcze i administracyjne w kraju importera*; wśród technologicznych – *infrastruktura komunikacyjna w kraju importera*, natomiast wśród czynników politycznych – *stabilność polityczna w kraju importera*.

**Tabela 1.** Grupy determinantów wyboru kierunku handlu zagranicznego

| GRUPA CZYNNIKÓW     | KATEGORIA                                 | LICZBA ODPOWIEDZI | ODSETEK ODPOWIEDZI (%) |
|---------------------|-------------------------------------------|-------------------|------------------------|
| 1                   | 2                                         | 3                 | 4                      |
| rynkowe             | poziom zamożności gospodarstw domowych    | 352               | 58,28                  |
|                     | wielkość i nasycenie rynku importera      | 252               | 41,72                  |
| społeczno-kulturowe | dysproporcje ekonomiczne w społeczeństwie | 379               | 62,75                  |
|                     | zróżnicowanie kulturowe i religijne       | 225               | 37,25                  |



cd. tabeli 1

| 1              | 2                                          | 3   | 4     |
|----------------|--------------------------------------------|-----|-------|
| prawne         | polityka celna i podatkowa                 | 204 | 33,77 |
|                | prawodawstwo gospodarcze i administracyjne | 400 | 66,23 |
| technologiczne | infrastruktura komunikacyjna               | 332 | 54,97 |
|                | wydatki na B+R                             | 272 | 45,03 |
| polityczne     | stopień ingerencji państwa w gospodarkę    | 188 | 31,13 |
|                | stabilność polityczna                      | 416 | 68,87 |

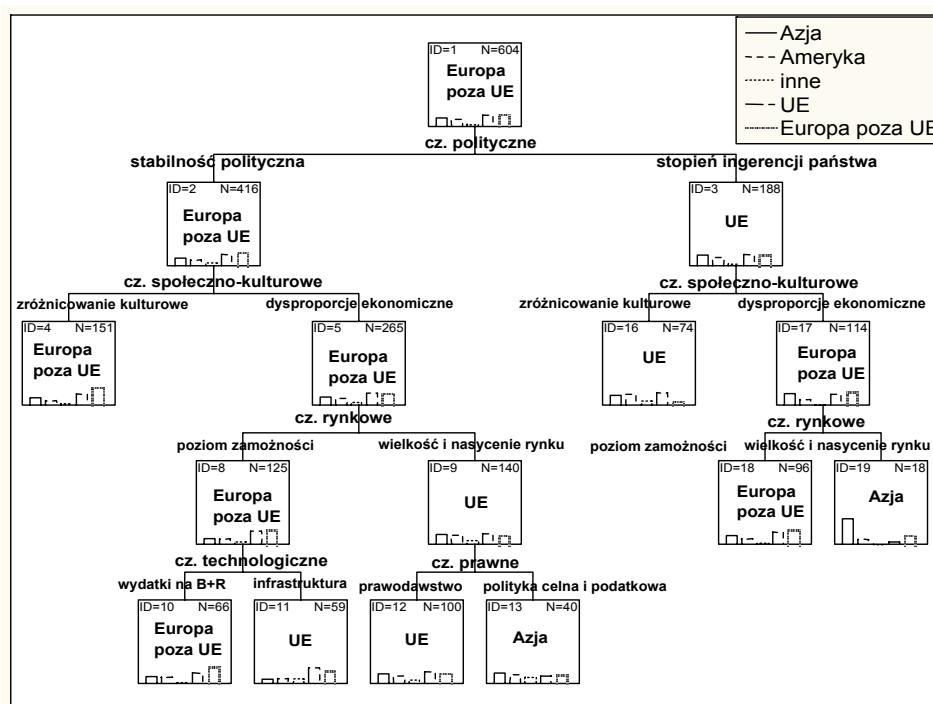
Źródło: Obliczenia własne na podstawie wyników badania ankietowego przeprowadzonego w okresie od listopada 2013 r. do kwietnia 2014 r.

Należy oczekiwać, że niektóre kombinacje czynników wymienionych w tabeli 1 mogą determinować wybór kierunku eksportu w pewnych grupach firm. Jest to przedmiotem badania, którego wyniki zamieszczono w następnym punkcie artykułu.

### 3. Wyniki segmentacji eksporterów

Postęp cywilizacyjny, rozwój nowych technologii, nowoczesne sposoby organizacji transportu sprawiają, że towary można przysyłać do odległych punktów docelowych w stosunkowo krótkim czasie. W ostatnich latach rozwój rynku transportowego, spedycyjnego, logistycznego i ubezpieczeniowego sprzyja obniżeniu jednostkowych kosztów eksportu towarów. Tym samym w dobie globalizacji fizyczna odległość pomiędzy krajem eksportera i rynkiem importera nie jest najważniejszym kryterium warunkującym handel zagraniczny. W warunkach polskich dodatkowo sprzyjającą okolicznością dla rozwoju handlu międzynarodowego jest intensywna rozbudowa infrastruktury drogowej, kolejowej i modernizacja infrastruktury portów morskich zwiększająca przepustowość transportu morskiego. To powoduje, że polscy eksporterzy mogą szukać rynków zbytu nie tylko w krajach europejskich, ale także na innych kontynentach. I taka opcja coraz częściej jest wybierana przez polskie firmy. W związku z tym w pierwszym etapie badania dokonano segmentacji eksporterów metodą CART ze względu na *perspektywiczny kierunek eksportu*. Ankietowani eksporterzy mogli wskazać na następujące rynki zbytu, na które obecnie lub w niedalekiej przyszłości chcieliby wysyłać swoje towary: kraje UE, kraje europejskie poza UE (np. Białoruś, Norwegia, Rosja, Szwajcaria, Ukraina), Ameryka (zarówno Ameryka Północna, jak i Ameryka Południowa), Azja i inne (Afryka, Australia z Oceanią). Wyniki po-

działów eksporterów w postaci drzewa klasyfikacyjnego przedstawiono na rys. 3. Przedmiotowe drzewo ma 8 węzłów końcowych i 7 węzłów dzielonych. Powstałe w wyniku podziału metodą CART homogeniczne podzbiory mogą być traktowane jako segmenty eksporterów, którzy preferują te same kierunki eksportu przy określonych kombinacjach kategorii cech reprezentujących czynniki rynkowe, społeczno-kulturowe, technologiczne, prawne i polityczne. W interpretacji wyników analizy CART skupiono się na charakterystyce wybranych segmentów eksporterów wyznaczonych przez węzły końcowe drzewa klasyfikacyjnego.



**Rys. 3.** Drzewo klasyfikacyjne CART dla zmiennej zależnej – *perspektywiczny kierunek eksportu*

Źródło: Opracowanie własne na podstawie wyników badania ankietowego przeprowadzonego w okresie od listopada 2013 r. do kwietnia 2014 r.

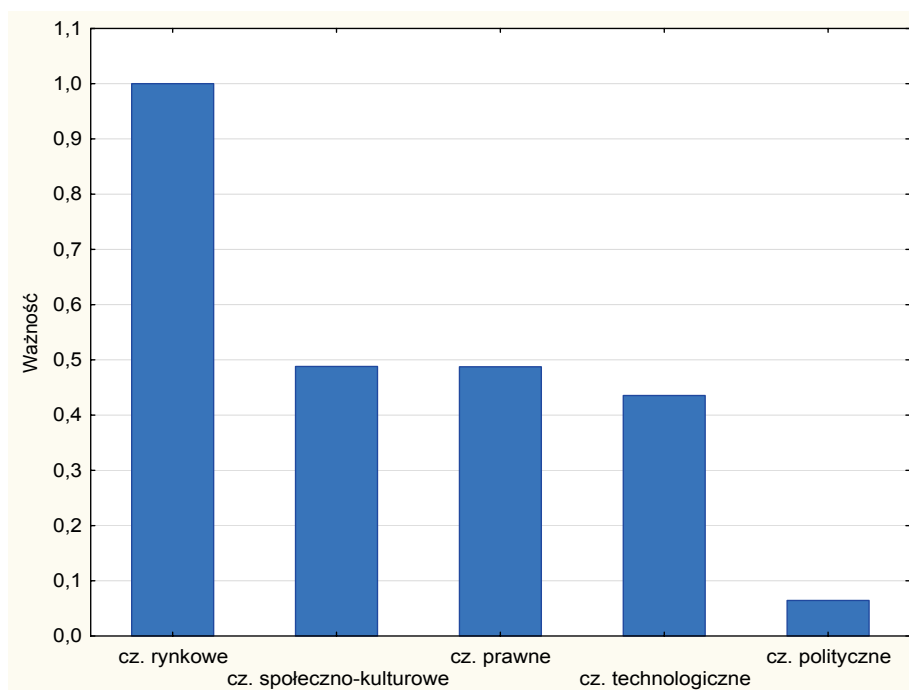
Analizując kolejne poziomy drzewa CART, począwszy od korzenia po liście końcowe, można sformułować następujące reguły:

- jeżeli przedsiębiorca, szukając perspektywicznego rynku zbytu, za priorytetowe uważa stabilność polityczną, dysproporcje ekonomiczne w społeczeństwie, poziom zamożności gospodarstw domowych i infrastrukturę komuni-

- kacyjną w kraju importera (węzeł nr 11), to najprawdopodobniej wybierze rynek UE (z prawdopodobieństwem 0,37),
- jeżeli eksporter za wiodące w poszukiwaniu rynków zbytu uzna stabilność polityczną, dysproporcje ekonomiczne w społeczeństwie i zakres ubóstwa, wielkość i nasycenie rynku oraz politykę celną i podatkową w kraju importera (węzeł nr 13), to z prawdopodobieństwem 0,25 wybierze dla swoich towarów rynek azjatycki,
  - jeżeli przedsiębiorca kieruje się stopniem ingerencji państwa w gospodarkę, dysproporcjami ekonomicznymi w społeczeństwie oraz poziomem zamożności gospodarstw domowych w kraju importera (węzeł nr 18), to z prawdopodobieństwem 0,35 skieruje towary swoje firmy na rynki tych krajów europejskich, które nie są członkami Unii Europejskiej.

Najwyższy odsetek trafnie zakwalifikowanych eksporterów wystąpił wśród tych przedsiębiorców, którzy za najbardziej perspektywiczny dla swoich towarów uważają rynek europejski poza UE (ok. 78% eksporterów) oraz rynek UE (ok. 60% eksporterów). W analizie CART można również określić siłę poszczególnych predyktorów w różnicowaniu segmentów eksporterów. Na rys. 4 zilustrowano ranking ważności takich czynników.

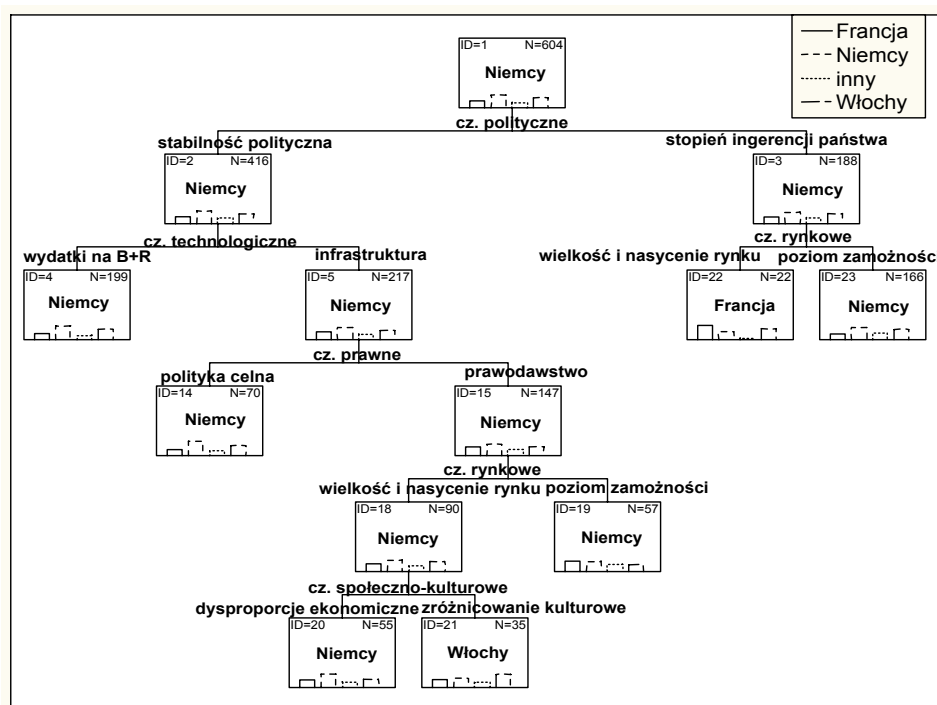
Na podstawie badania siły poszczególnych predyktorów w różnicowaniu eksporterów w przedmiotowej analizie CART stwierdzono, że największy wpływ na wybór perspektywnego kierunku eksportu mają czynniki rynkowe, a w dalszej kolejności czynniki społeczno-kulturowe i prawne.



**Rys. 4.** Ranking ważności predyktorów w analizie CART dla zmiennej zależnej *perspektywiczny kierunek eksportu*

Źródło: Opracowanie własne na podstawie wyników badania ankietowego przeprowadzonego w okresie od listopada 2013 r. do kwietnia 2014 r.

Przynależność Polski do Unii Europejskiej i bezpośrednie sąsiedztwo z innymi krajami unijnymi, a w szczególności z głównym odbiorcą polskich towarów i usług, czyli Niemcami, sprawia, że wiele firm wiąże swoje obecne oraz przyszłe plany eksportowe z tym rynkiem. Zatem kolejną analizę CART przeprowadzono dla zmiennej zależnej *perspektywiczny importer z UE*. Respondentom przedstawiono do wyboru niektóre kraje reprezentujące duże i silne gospodarki UE: Francję, Niemcy, Włochy i inne. Wyniki segmentacji polskich eksporterów za pomocą analizy CART według omawianej zmiennej zależnej przedstawiono na rys. 5.



**Rys. 5.** Drzewo klasyfikacyjne CART dla zmiennej zależnej *perspektywiczny importer z UE*

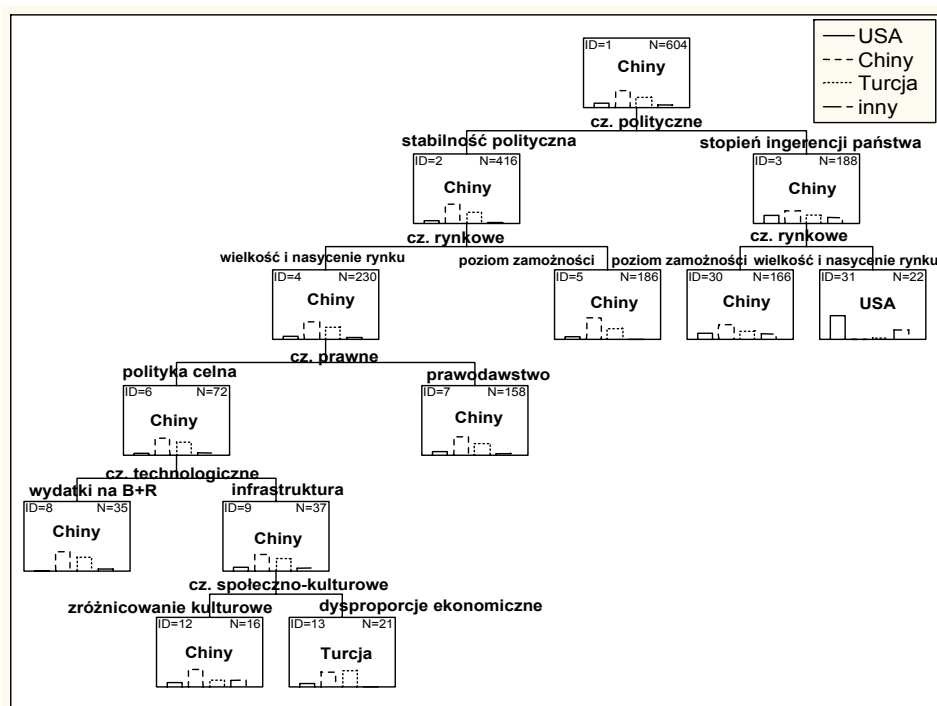
Źródło: Opracowanie własne na podstawie wyników badania ankietowego przeprowadzonego w okresie od listopada 2013 r. do kwietnia 2014 r.

Poniżej przedstawiono opis wybranych liści drzewa klasyfikacyjnego widocznego na rys. 5:

- jeżeli przedsiębiorca, szukając perspektywicznego rynku zbytu wśród krajów UE, za wiodące uważa stabilność polityczną oraz wydatki na badania i rozwój w kraju importera (węzeł nr 4), to najprawdopodobniej wybierze Niemcy (z prawdopodobieństwem ok. 0,4),
- jeżeli eksporter kieruje się stabilnością polityczną, infrastrukturą komunikacyjną, prawodawstwem gospodarczym i administracyjnym, wielkością i nasyceniem rynku oraz zróżnicowaniem kulturowym i religijnym w kraju importera (węzeł nr 21), to z największym prawdopodobieństwem równym ok. 0,37 wybierze rynek włoski,
- jeżeli decydenci kierują się stopniem ingerencji państwa w gospodarkę oraz wielkością i nasyceniem rynku importera (węzeł nr 22), to najprawdopodobniej wybiorą Francję jako zewnętrzny rynek zbytu (z prawdopodobieństwem ok. 0,41).

Najwięcej trafnie zakwalifikowanych eksporterów w aktualnej analizie CART znalazło się wśród tych, którzy za najbardziej perspektywiczny dla swoich towarów uważają rynek niemiecki (ok. 86% eksporterów). Na podstawie badania siły poszczególnych predyktorów w różnicowaniu segmentów eksporterów w ramach przedmiotowej analizy CART stwierdzono, że największy wpływ na wybór perspektywicznego eksportera w UE miały czynniki rynkowe, społeczno-kulturowe i polityczne.

Możliwości transportu towarów na dalekie odległości sprawiają, że eksporterzy skłonni są poszukiwać rynków zbytu poza granicami Europy. W Azji czy w Ameryce można wskazać kraje, w których polskie produkty już są konkurencyjne zarówno pod względem ceny, jak i jakości. W związku z tym uzasadnione jest przeprowadzenie segmentacji eksporterów za pomocą analizy CART dla zmiennej zależnej *perspektywiczny importer spoza Europy*. Respondenci mogli wskazać jeden z następujących krajów przeznaczenia eksportu: Chiny, Turcję, USA i inne. Wyniki tej analizy przedstawia drzewo klasyfikacyjne na rys. 6.



**Rys. 6.** Drzewo klasyfikacyjne CART dla zmiennej zależnej *perspektywiczny importer spoza Europy*

Źródło: Opracowanie własne na podstawie wyników badania ankietowego przeprowadzonego w okresie od listopada 2013 r. do kwietnia 2014 r.

Reguły decyzyjne dla wybranych liści drzewa klasyfikacyjnego przedstawionego na rys. 6 są następujące:

- jeżeli przedsiębiorca, szukając pozaeuropejskich rynków zbytu, bierze pod uwagę stabilność polityczną, wielkość i nasycenie rynku, politykę celną i podatkową oraz infrastrukturę komunikacyjną i dysproporcje ekonomiczne w kraju importera (węzeł nr 13), to najprawdopodobniej wybierze Turcję (z prawdopodobieństwem ok. 0,48),
- jeżeli eksporter uwzględnia stabilność polityczną oraz poziom zamożności gospodarstw domowych w kraju importera (węzeł nr 5), to z największym prawdopodobieństwem równym ok. 0,51 wybierze rynek chiński dla swoich towarów,
- jeżeli respondent, poszukując pozaeuropejskiego rynku zbytu, kieruje się stopniem ingerencji państwa w gospodarkę oraz wielkością i nasyceniem rynku importera (węzeł nr 31), to najprawdopodobniej wybierze USA (z prawdopodobieństwem ok. 0,68).

Najwyższy odsetek trafnie zakwalifikowanych eksporterów w bieżącej analizie CART mieli ci respondenci, którzy za najbardziej rokujący dla swojej działalności eksportowej uważają rynek chiński (ok. 96% eksporterów). Badanie siły predyktorów w różnicowaniu eksporterów wskazuje, że największy wpływ na wybór perspektywnego kraju importera zlokalizowanego poza Europą miały czynniki rynkowe, społeczno-kulturowe i polityczne, a najmniejsze znaczenie miały czynniki technologiczne i prawne.

## Podsumowanie

Wyniki przedstawionych badań potwierdziły przydatność drzew klasyfikacyjnych w segmentacji przedsiębiorstw, które eksportują lub planują działalność eksportową. Wykazano, że eksporterzy są zróżnicowani pod względem postrzegania czynników determinujących ich wybory rynku zewnętrznego. W badaniu wyodrębniono profile eksporterów, którzy kierują się podobnymi motywami, poszukując krajów importerów w obrębie UE, jak i poza granicami Europy. Działalność eksportowa niesie za sobą określonego rodzaju ryzyko: kraju importera, kontrahenta, transakcyjne, rynkowe, towarowe i inne, które musi być brane pod uwagę przez racjonalnie działające przedsiębiorstwo zamierzające rozszerzyć sprzedaż towarów poza rynek wewnętrzny. Część z elementów stwarzających ryzyko uwidocznia się zwłaszcza w czasie niestabilnej sytuacji gospodarczej na świecie (np. zapoczątkowanej poważnym kryzysem sektora finansów w USA

w 2007 r. i 2008 r.) czy podczas międzynarodowego kryzysu politycznego (np. spowodowanego naruszeniem przez Rosję jedności terytorialnej Ukrainy w 2014 r.). Polskie firmy niektórych branż odczuły i odczuwają szczególnie skutki tego drugiego kryzysu, tym bardziej więc staranny wybór kraju importera jest istotny, bo pozwala przynajmniej częściowo ograniczyć niektóre elementy ryzyka występującego w eksporcie. W przedmiotowym badaniu najważniejsze przy wyborze docelowego rynku eksportu okazywały się czynniki ekonomiczne i to wydaje się uzasadnione z punktu widzenia przedsiębiorstwa maksymalizującego zysk. Może jednak zastanawiać niska pozycja czynników politycznych, które okazały się najmniej ważne przy wyborze kierunku eksportu, a także kraju importera w UE (wyższą pozycję ta grupa czynników miała przy wyborze kraju importera zlokalizowanego poza Europą). Być może wpływ na to mógł mieć moment rozpoczęcia badania ankietowego (większość danych zebrano przed aneksją Krymu przez Rosję w 2014 r.), a także dobór krajów importerów przedstawionych respondentom do oceny. Z tego też względu badanie w przyszłości powinno być powtarzane, co pozwoli zaktualizować wyniki w zakresie preferencji czynników branż pod uwagę przez polskich przedsiębiorców przy poszukiwaniu zewnętrznych rynków zbytu. Zaletą przedmiotowych badań (zwłaszcza przy szerszej palecie zmiennych diagnostycznych) jest również możliwość wskazania potencjalnych problemów ograniczających rozwój eksportu. Ich zdiagnozowanie może być pomocne w uruchomieniu przez państwo instrumentów, które pomogą polskim eksporterom w pozyskiwaniu nowych rynków zbytu, czy umacnianiu pozycji na już posiadanych rynkach (np. poprzez gwarancje ubezpieczeniowe, preferencyjne kredyty, poręczenia i gwarancje państwa, stworzenie ram do współpracy gospodarczej poprzez odpowiednie umowy międzyrządowe, itp.).

## Literatura

- Bąk M. (2014), *Marketing eksportowy – poradnik dla małych i średnich przedsiębiorców*, Polska Agencja Rozwoju Przedsiębiorczości, Warszawa.
- Bialecki K.P., Kaczmarek T.T. (2008), *Eksportowa działalność małych i średnich przedsiębiorstw*, Difin, Warszawa.
- Breiman L., Friedman J.H., Olshen R.A., Stone C.J. (1984), *Classification and regression trees*, CRC Press, London.
- Gatnar E. (2001), *Nieparametryczna metoda dyskryminacji i regresji*, Wydawnictwo Naukowe PWN, Warszawa.



- Gatnar E. (2009), *Drzewa klasyfikacyjne i regresyjne*, [w:] M. Walesiak, E. Gatnar (red.), *Statystyczna analiza danych z wykorzystaniem programu R*, Wydawnictwo Naukowe PWN, Warszawa.
- Hagemejer J. (2006), *Czynniki wpływające na decyzje przedsiębiorstw o eksporcie. Analiza danych mikroekonomicznych*, „Kredyt i Bank”, Vol. 37 (7), Warszawa.
- Karasek A. (2013), *Czynniki decydujące o podjęciu działalności eksportowej na przykładzie województwa lubelskiego*, Zeszyty Naukowe Politechniki Śląskiej, „Organizacja i zarządzanie”, z. 64.
- Kłysik-Uryszek A., Serwach T. (2015), *Znaczenie działalności eksportowej dla przedsiębiorstw z województwa łódzkiego – wyniki badania ankietowego*, „Ekonomia Międzynarodowa”, nr 5.
- Nemkova E., Souchon A.L., Hughes P. (2012), *Export decision-making orientation: An exploratory study*, „International Marketing Review”, Vol. 29, Issue 4.
- Puchalska K. (2010), *Aktywność eksportowa przedsiębiorstw*, „Bank i Kredyt”, Vol. 41 (3).
- [www 1] <http://www.mg.gov.pl/> (dostęp: 10.03.2015).

#### ANALYSIS OF THE DETERMINANTS OF THE CHOICE OF EXPORT DIRECTIONS WITH USING CLASSIFICATION TREES

**Summary:** The purpose of this article is to identify main factors determining the choice of geographical export directions of companies operating in Poland. The research includes the market factors, law factors, socio-cultural factors, technological and political factors, which may be important in the search for external markets. In the analysis was used data from a survey conducted among exporters. For the classification of companies exporting their goods there are used decision trees created in accordance with the CART algorithm. These research methods enable the creation of companies profiles which have similar export policy in terms of priorities of importers choice. The results of this study can help in the identification and in the description of the factors in the development of Polish exports.

**Keywords:** export, market, classification trees, CART algorithm.



**Zbigniew Świtalski**

Uniwersytet Zielonogórski  
Wydział Matematyki, Informatyki i Ekonomometrii  
Z.Switalski@wmie.uz.zgora.pl

## **SOME PROPERTIES OF COMPETITIVE EQUILIBRIA AND STABLE MATCHINGS IN A GALE-SHAPLEY MARKET MODEL**

**Summary:** In the paper we study some properties of competitive equilibria in the market model of Gale-Shapley type. We introduce a formal definition of equilibrium in this model without assumption about zero pricing of unassigned goods. We also prove that competitive equilibrium allocations in this model are strongly stable matchings in the Gale-Shapley sense (and vice versa).

**Keywords:** Gale-Shapley market model, Competitive equilibrium, Stable matching, Indivisible good, Unit demand market model.

### **Introduction**

Market models with finite number of indivisible goods and unit demand became very popular since Gale [1960] presented his model of buying  $n$  houses by  $n$  buyers [Gale, 1960, Ch. V, § 6] and Shapley and Shubik [1971/72] developed their theory of „assignment games”. The Gale and Shapley [1962] model of college admissions may also be treated as some kind of „market” model with unit demand, yet without prices and money transfers (in the Gale-Shapley model applicants can be interpreted as „buyers” and colleges can be interpreted as „sellers” acting in a „college market” in which „traded” goods are seats in particular colleges).

Nowadays, market models with unit demand are very often used for modeling auction markets, see, e.g. [Andersson and Erlanson, 2013], and hence their importance considerably increased in recent years.

The most important problems concerned with such models are, of course, the problems related to competitive equilibria – existence of equilibria, algorithms for finding the equilibria, properties of equilibria and so on.

A general model of market with unit demand was recently presented by Chen, Deng and Ghosh [2014]. They studied models with general utility functions  $u(b, s, p(s))$  and budget constraints  $r(b, s)$  (in our notation  $u(b, s, p(s))$  is interpreted as utility of good  $s$  for a buyer  $b$ , when the price of  $s$  is  $p(s)$ , and  $r(b, s)$  is the maximal (reservation) price which a buyer  $b$  is willing to pay for the good  $s$ ).

A model which is described in our paper may be treated as some special case of the Chen, Deng and Ghosh's model. We assume that buyers' preferences do not depend on prices and hence their utilities can be described by functions of the type  $u(b, s, p(s)) = u(b, s)$ . The model is based on the Gale-Shapley college admissions model and it seems that very poor research has been done on studying equilibria in such models till now. The only references we could mention here are the (non-published) paper of Azevedo and Leshno [2014, p. 13, lemma 2] and the author's papers [e.g., Świtalski, 2008, 2014].

In our paper we formally define equilibrium in a Gale-Shapley market model. We do not use the concept of dummy buyer or dummy good, as in typical models [e.g. Mishra and Talman, 2010 or Chen, Deng and Ghosh, 2014]. Instead we introduce the sets of acceptable buyers and acceptable goods. We do not use also the concept of utility, as in Chen, Deng and Ghosh [2014], because we represent preferences by order relations as in the model of Gale and Shapley.

In section 2 we show two simple, but very important properties of such equilibria (maximality and stability with respect to changing the prices of unassigned goods) and show that the traditional assumption of zeroing the prices of unassigned goods may be deleted from the definition with preserving the most important properties of the equilibrium.

In section 3 we show that equilibria allocations in our model can be identified with the so-called strongly stable matchings (here stability is understood as Gale-Shapley stability defined in their paper [1962]).

## 1. The model

We consider two finite and non-empty sets:  $B$  and  $S$ .  $B$  is a set of buyers and  $S$  is a set of sellers. Each seller owns exactly one indivisible object (good) which she wants to sell. We identify sellers with objects they own, hence  $S$  may also be interpreted as a set of goods. Goods may be houses, horses, paintings and so on. Each buyer wants to buy no more than one object (so we have unit demand in our market).

We assume that some buyers  $b \in B$  may be not acceptable for a given seller  $s \in S$  (i.e.  $S$  is not ready to enter into a transaction with  $b$ ) and, similarly, some sellers  $s \in S$  may be not acceptable for a given buyer  $b \in B$ . Hence we consider only pairs  $(b, s)$ , such that  $b$  is acceptable for  $s$  and  $s$  is acceptable for  $b$ . Formally, we assume that a non-empty set of acceptable pairs  $F \subset B \times S$  is defined and the sets:

$$\begin{aligned} F(b) &= \{s \in S: (b, s) \in F\}, \\ F(s) &= \{b \in B: (b, s) \in F\} \end{aligned}$$

are interpreted as the set of acceptable sellers for a buyer  $b$  and the set of acceptable buyers for a seller  $s$ , respectively. We assume that for each  $b \in B$ ,  $F(b) \neq \emptyset$ , and for each  $s \in S$ ,  $F(s) \neq \emptyset$ .

We assume also that buyers have preferences over the sellers (equivalently – over the objects) and sellers have preferences over the buyers. Preferences are represented by weak orders (transitive and complete relations), i.e. to each agent (buyer  $b$  or seller  $s$ ) an ordered list of agents from the opposite set is assigned, with possible indifferences between the agents.

For example, notation  $b: [s \ t] \ u$  will mean that for a buyer  $b$ , sellers  $s$  and  $t$  are indifferent and  $s$  is better than  $u$ ,  $t$  is better than  $u$ . We will use the notation  $s \geq_b t$  meaning that for  $b$ ,  $s$  is better than (or indifferent to)  $t$ . Similarly,  $s >_b t$  will mean strict preference and  $s \approx_b t$  – indifference.

For each buyer  $b$  and each seller  $s \in F(b)$  we define a reservation price  $r(b, s) \geq 0$  (budget constraint) interpreted as the maximal price that  $b$  is willing to pay for the object  $s$  (in the „college market” the role of reservation price is played by the sum of scores of the applicant  $b$  from the disciplines required by the college  $s$ ).

We assume that preferences of the sellers are determined by reservation prices of the buyers, i.e. for any buyers  $b$  and  $c$  and a seller  $s$  we have

$$b \geq_s c \Leftrightarrow r(b, s) \geq r(c, s) \quad (1.1)$$

A *matching* of buyers with sellers (or an allocation of goods among buyers) is some assignment of buyers to acceptable sellers such that no buyer gets more than one good and no good is sold to more than one buyer. Formally, we have:

**(1.2) Definition.** *Matching*  $m$  is a set of disjoint pairs  $m \subset F \subset B \times S$  (two pairs  $(b, s)$  and  $(c, t)$  are disjoint if  $b \neq c$  and  $s \neq t$ ).

If  $m \subset B \times S$  is a matching, then  $m(b) = s$  or  $m(s) = b$  will mean that  $(b, s) \in m$  (there is a transaction between buyer  $b$  and seller  $s$ ). If, for a given  $b \in B$ , there

is no  $s \in F(b)$  such that  $(b, s) \in m$ , then we write  $m(b) = \emptyset$ , and, similarly,  $m(s) = \emptyset$  means that there is no  $b \in F(s)$  such that  $(b, s) \in m$ .

In the next section we will need the following notion of maximal matching.

**(1.3) Definition.** Matching  $m$  is *maximal* if there is no matching  $n \neq m$  such that  $m \subset n \subset F \subset B \times S$ .

The next definition is the standard definition of Gale-Shapley stability.

**(1.4) Definition.** A matching  $m \subset F \subset B \times S$  is *stable* if there is no pair  $(b, s) \in F \setminus m$  such that  $s >_b m(b)$  and  $b >_s m(s)$  (we assume that  $s >_b \emptyset$  and  $b >_s \emptyset$  are always true).

The pair  $(b, s)$  satisfying  $s >_b m(b)$  and  $b >_s m(s)$  in the above definition will be called blocking pair.

We will also use the notion of strongly stable matching which can be defined similarly as in the definition (1.4) with the only difference that the inequality  $b >_s m(s)$  is replaced by  $b \geq_s m(s)$  (the pair  $(b, s)$  satisfying the inequalities  $s >_b m(b)$  and  $b \geq_s m(s)$  will be called weakly blocking pair).

It is easy to see that any stable (strongly stable) matching is maximal (if no, there would be a pair  $(b, s)$  such that  $m(b) = \emptyset$  and  $m(s) = \emptyset$  and so it would be a blocking (weakly blocking) pair).

Assume now that each seller announces a price  $p(s)$  for the object she owns. A sequence of prices  $p(s)$  ( $s \in S$ ) will be called the *price vector*  $p$ . For any buyer  $b$  and a price vector  $p$  we define the set of feasible sellers as

$$F(p, b) = \{ s \in F(b) : r(b, s) \geq p(s) \}.$$

So the seller  $s$  is feasible for  $b$  if  $b$  is ready to buy the object  $s$  at the price  $p(s)$ . We do not exclude here the situation that  $F(p, b)$  is empty, i.e. that the prices of all objects are too high for the buyer  $b$ .

We define the set of best (maximal) objects for  $b$  in the set  $F(p, b)$  as:

$$M(p, b) = \{ s \in F(p, b) : \forall t \in F(p, b), s \geq_b t \}$$

(and  $M(p, b) = \emptyset$ , if  $F(p, b) = \emptyset$ ).

## 2. Equilibria – definition and basic properties

Classical definition of competitive equilibrium (for continuous models) requires that the equilibrium prices are „market clearing” prices, i.e. that for each good, demand for this good equals supply of this good. In the presented model, supply of each good is one and hence, if the number of goods is greater than the

number of buyers, then the equality can not hold (because of the unit demand of the buyers). Hence, for the considered model, the definition of competitive equilibrium should be modified. Typical approach, in the theory of unit demand models, is to introduce the assumption of zero pricing of unassigned (undemanded) goods [see, e.g., Mishra and Talman, 2010 and Chen, Deng and Ghosh, 2014].

But in real markets, prices of most of the goods are positive, even if some of them are undemanded (i.e. if there are no buyers which could buy them). From the point of view of continuous models, we have no equilibrium in such situation, yet for the unit demand model it appears that we can define equilibrium even under the assumption of positivity of prices of undemanded goods.

Namely, in our paper we extend the notion of equilibrium for the unit demand models, introducing the so-called weak equilibrium, for which all important properties of standard definition are preserved and in which all prices (even for unassigned <undemanded> goods) may be positive.

We start from the very weak notion of quasi-equilibrium. Then we formally define the notions of unassigned and undesired goods. In a quasi-equilibrium unassigned goods may be interpreted as goods which are undemanded under fixed prices, and undesired goods are those which are undemanded under any price. Using these notions we then define equilibria and weak equilibria and state their properties.

**(2.1) Definition.** *Quasi-equilibrium* is a pair  $(m, p)$  (where  $m \subset F \subset B \times S$  is a matching and  $p$  – a price vector), satisfying the conditions (for each  $b \in B$  and  $s \in F(b)$ ):

- (1)  $F(p, b) \neq \emptyset \Rightarrow \exists s \in M(p, b), (b, s) \in m,$
- (2)  $(b, s) \in m \Rightarrow s \in M(p, b).$

The first condition says that to any buyer  $b$ , for which the set of feasible goods is non-empty, a good  $s \in F(b)$  is assigned, which is best for  $b$ . The second condition says that the good  $s$  which is assigned to  $b$  should be the best good for her. In other words, if, for a buyer  $b$ ,  $F(p, b)$  is empty, then no good is assigned to  $b$ .

If  $(m, p)$  is a quasi-equilibrium, then  $p$  will be called quasi-equilibrium prices, and  $m$  – quasi-equilibrium allocation. It is easy to see that in a quasi-equilibrium some goods may be not assigned to any buyer and some buyers may not obtain any good (see example (2.5) below).

**(2.2) Definition.** Let  $m$  be a matching. A good  $s$  such that there exists  $b$  with  $(b, s) \in m$  is called *assigned under  $m$* . A good which is not assigned under  $m$  is called *unassigned under  $m$* . A buyer  $b$  such that there is no  $s$  with  $(b, s) \in m$  is called *unsatisfied under  $m$* .

**(2.3) Definition.** Let  $(m, p)$  be a quasi-equilibrium and  $q$  a price vector. We say that  $q$  differs from  $p$  only for good  $s$  if  $q(t) = p(t)$  for all  $t \neq s$ .

**(2.4) Definition.** Let  $(m, p)$  be a quasi-equilibrium. We say that  $s$  is undesired under  $(m, p)$ , if it is unassigned under  $m$  and if  $(m, q)$  is a quasi-equilibrium for any price vector  $q$  such that  $q$  differs from  $p$  only for  $s$ .

Hence, undesired goods are those which are not demanded under prices  $p$  and which will be not demanded even if we change in any way (for example decrease) their prices.

**(2.5) Example.** Let  $B = \{b, c\}$ ,  $S = \{s, t, u\}$ ,  $F = \{(b, s), (b, t), (b, u), (c, s), (c, t)\}$  and preferences of the buyers are:  $b: s \succ t \succ u$ ,  $c: t \succ s$ , (hence for the buyer  $b$  we have  $s > t > u$ , and for  $c$  we have  $t > s$ ). Reservation prices are:  $r(b, s) = r(b, t) = r(b, u) = 2$ ,  $r(c, s) = r(c, t) = 1$ . Let  $p = (2, 2, 2)$  (i.e.  $p(s) = p(t) = p(u) = 2$ ) and  $m = \{(b, s)\}$ . Then  $(m, p)$  is a quasi-equilibrium (we have  $F(p, b) = \{s, t, u\}$ ,  $F(p, c) = \emptyset$  and  $M(p, b) = \{s\}$ , hence the only possible pair in any quasi-equilibrium allocation with prices  $p$  is  $(b, s)$ ). The goods  $t$  and  $u$  are unassigned under  $m$ , but  $u$  is undesired under  $(m, p)$  (if we take prices  $q = (2, 2, q(u))$ , i.e. if we take  $q$  differing from  $p$  only for  $u$ , then  $(m, q)$  is still a quasi-equilibrium) and  $t$  is not undesired under  $(m, p)$  (if we take prices  $q = (2, 1, 2)$ , then  $(m, q)$  is not a quasi-equilibrium, because  $F(q, c) = \{t\}$  and  $M(q, c) = \{t\}$ , but  $(c, t) \notin m$ ).

Now we state the standard definition of (competitive) equilibrium. Our definition agree with the definitions presented in [Mishra and Talman, 2010] and in [Chen, Deng and Ghosh, 2014], although the notation here is different and we do not use the concepts of dummy buyer, dummy good and utility function.

**(2.6) Definition.** A pair  $(m, p)$  is called equilibrium, if it is a quasi-equilibrium (i.e. conditions (1) and (2) from the definition (2.1) are satisfied) and if prices of all unassigned goods are zero.

The next two propositions state two important properties of any equilibrium: maximality and stability with respect to changing the prices of unassigned goods.

**(2.7) Proposition.** If  $(m, p)$  is an equilibrium, then  $m$  is a maximal matching.

**Proof.** Assume that  $m$  is not maximal. Hence there is a pair  $(b, s) \in F$  such that  $(b, s) \notin m$ ,  $b$  is unsatisfied and  $s$  is unassigned. By the definition (2.6), price of  $s$  is zero and hence  $s \in F(p, b)$  ( $s$  is feasible for  $b$ ). By (1) from the definition (2.1), there exists  $t \in M(p, b) \subset F(p, b)$  such that  $(b, t) \in m$ . Hence  $b$  is satisfied, a contradiction.

Maximality of  $m$  means that there is no pair  $(b, s)$  of mutually acceptable agents (buyer and seller) such that  $b$  is unsatisfied (there is no good assigned to

$b$ ) and the good owned by  $s$  is not sold (not assigned to any buyer). In special case, if all pairs  $(b, s)$  are acceptable, it means that if the number of buyers is greater than the number of sellers, then no good is unassigned, and if the number of sellers is greater than the number of buyers, then no buyer is unsatisfied. Hence the prices  $p$  in any equilibrium may, in some sense, be interpreted as „market clearing” prices similarly as in the (neo-) classical theory of competitive (Walrasian) equilibrium.

The next property of equilibrium says that, roughly speaking, for any equilibrium  $(m, p)$  we can change the prices of unassigned goods without changing the equilibrium allocation  $m$ .

**(2.8) Proposition.** If  $(m, p)$  is an equilibrium, then all unassigned goods under  $m$  are undesired under  $(m, p)$ .

**Proof.** Take an unassigned good  $s$  and let  $q$  be a price vector such that  $q$  differs from  $p$  only for  $s$ . It is easy to see that for any buyer  $b$ ,  $F(p, b) \neq \emptyset$  if and only if  $F(q, b) \neq \emptyset$  and that  $M(p, b) = M(q, b)$  (because price of  $s$  is zero and by increasing it we can only decrease the sets  $F(p, b)$  without affecting the sets  $M(p, b)$ ). Hence, if the conditions (1) and (2) from the definition (2.1) are satisfied for  $(m, p)$ , then they are also satisfied for  $(m, q)$ . Thus, by definition (2.4),  $s$  is undesired under  $(m, p)$ .

Proposition (2.8) is a formal statement of an obvious fact that if some good  $s$  is not demanded under price  $p(s)$ , then it will be not demanded under any higher price  $q(s)$ .

We can use proposition (2.8) to weaken the notion of equilibrium and to formulate the definition of equilibrium without the assumption of zeroing the prices of unassigned goods.

**(2.9) Definition.** A pair  $(m, p)$  is called weak equilibrium if it is a quasi-equilibrium such that all unassigned goods under  $m$  are undesired under  $(m, p)$ .

Proposition (2.8) implies that each equilibrium is a weak equilibrium. It is also easy to see that if  $(m, p)$  is a weak equilibrium, then  $m$  is maximal (for a weak equilibrium  $(m, p)$  we can decrease all the prices of unassigned goods to zero, thus obtaining an equilibrium  $(m, q)$  for which, by proposition (2.7),  $m$  is maximal).

Hence weak equilibrium is a reasonable extension of the concept of equilibrium, preserving the property of maximality (thus the weak equilibrium prices can also be interpreted as „market clearing” prices) but without the property of zero pricing of unassigned goods.



### 3. Relationship with the Gale-Shapley stability

In this section we formulate and prove a result about relationship between the notion of equilibrium in the Gale-Shapley market model and the notion of stable matching in the sense of Gale and Shapley's college admission model [1962]. The result says that a matching  $m$  is an equilibrium (weak equilibrium) allocation if and only if it is a strongly stable matching in the sense of Gale and Shapley.

Hence we obtain another important property of any (weak) equilibrium allocation (i.e. the property of being a strongly stable matching) and, on the other hand, a property of any strongly stable matching (being an equilibrium allocation).

The result is the following.

**(3.1) Theorem.** If  $(m, p)$  is an equilibrium (weak equilibrium), then  $m$  is a strongly stable matching, and if  $m$  is a strongly stable matching, then there exist prices  $p$  such that  $(m, p)$  is an equilibrium (weak equilibrium).

**Proof.** First we prove that  $m$  is strongly stable for any equilibrium  $(m, p)$ . Assume that we have an equilibrium  $(m, p)$  and  $m$  is not strongly stable. Hence there exists a pair  $(b, s) \in F \setminus m$  such that  $s >_b m(b)$  and  $b \geq_s m(s)$ . Consider two cases:

- (1)  $m(s) \neq \emptyset$ . Obviously  $(m(s), s) \in m$  and, by (2), definition (2.1), we have  $s \in M(p, m(s))$ . Hence  $r(m(s), s) \geq p(s)$ . By our initial assumption  $b \geq_s m(s)$  and this implies, by (1.1),  $r(b, s) \geq r(m(s), s) \geq p(s)$ . Hence  $s \in F(p, b)$ . Thus, by our assumption  $s >_b m(b)$ , we have  $m(b) \notin M(p, b)$ , a contradiction with the definition of equilibrium (by (2), definition (2.1) we should have  $m(b) \in M(p, b)$ ).
- (2)  $m(s) = \emptyset$ . In this case  $s$  is unassigned and hence  $p(s) = 0$ . Thus, obviously,  $r(b, s) \geq p(s)$ , and the same reasoning as previously leads to a contradiction.

Now we prove that for a strongly stable matching  $m$  there exist prices  $p$  such that  $(m, p)$  is an equilibrium.

Assume that  $m$  is strongly stable. Define  $p$  by  $p(s) = r(b, s)$  if there exist  $b \in F(s)$  such that  $m(s) = b$  and  $p(s) = 0$ , if there is no such  $b$ . Hence prices of all unassigned goods are zero and by definition (2.6) it suffices to show that  $(m, p)$  is a quasi-equilibrium. First we prove that condition (1) from the definition (2.1) is satisfied.

Assume that  $F(p, b) \neq \emptyset$  for some  $b \in B$  and that  $(b, s) \notin m$  for all  $s \in M(p, b)$ . Consider two cases:

- (1) there exists  $t \in F(b)$  such that  $(b, t) \in m$ . Hence  $b \in F(t)$  and  $m(t) = b$ . By the definition of  $p$ , we have  $p(t) = r(b, t)$  and so  $t \in F(p, b)$ . By our initial assumption  $t \notin M(p, b)$ . Obviously  $M(p, b) \neq \emptyset$ . Take any  $s \in M(p, b)$ . Hence

$r(b, s) \geq p(s)$  (because  $s \in M(p, b) \subset F(p, b)$ ) and  $s >_b t$  (because  $t \in F(p, b) \setminus M(p, b)$ ). Consider two subcases:

- (a) there exists  $c \in F(s)$  such that  $m(s) = c$ . Thus  $p(s) = r(c, s)$  and so  $r(b, s) \geq r(c, s)$ . Hence, by (1.1),  $b \geq_s c = m(s)$  and so (taking into account that  $s >_b t = m(b)$ ) we obtain that  $(b, s)$  is a weakly blocking pair, a contradiction with the strong stability of  $m$ .
- (b) there is no  $c \in F(s)$  such that  $m(s) = c$ . Obviously,  $(b, s)$  is also a weakly blocking pair in this case, because  $s >_b t = m(b)$  and  $b \geq_s \emptyset = m(s)$ . Hence, we have also a contradiction here.

We now consider the second case:

- (2) there is no  $t \in F(b)$  such that  $(b, t) \in m$ . We have  $F(p, b) \neq \emptyset$ , hence there exists  $s \in F(p, b)$  and  $r(b, s) \geq p(s)$ . Buyer  $b$  is not matched with any  $t \in F(b)$ , hence, by maximality of  $m$ , there exists  $c \in F(s)$  such that  $(c, s) \in m$ . Thus  $p(s) = r(c, s)$  and  $r(b, s) \geq r(c, s)$  (because  $r(b, s) \geq p(s)$ ). Hence, by (1.1),  $b \geq_s c = m(s)$ . We have also  $s >_b \emptyset = m(b)$ , thus  $m$  is not strongly stable, a contradiction.

Now we prove that condition (2) from the definition (2.1) is satisfied. Take a pair  $(b, s) \in m$  and assume that  $s \notin M(p, b)$ . We have  $(b, s) \in m$  and so  $m(s) = b$  and  $p(s) = r(b, s)$ , hence  $s \in F(p, b) \setminus M(p, b)$ . Thus there exists  $t \in F(p, b)$  such that  $t >_b s$ . Consider two cases:

- (1) there exists  $c \in F(t)$  such that  $m(t) = c$ . Hence  $p(t) = r(c, t)$ . We have  $t \in F(p, b)$ , so  $r(b, t) \geq p(t) = r(c, t)$ . Hence, by (1.1),  $b \geq_t c = m(t)$  and  $(b, t)$  is a weakly blocking pair (because  $t >_b s = m(b)$ ), a contradiction.
- (2) there is no  $c \in F(t)$  such that  $m(t) = c$ . Hence  $p(t) = 0$  and also in this case  $(b, t)$  is a weakly blocking pair (we have  $b \geq_t \emptyset = m(t)$  and  $t >_b s = m(b)$ ), a contradiction.

## Concluding remarks

In our paper we have studied some properties of competitive equilibria in a market model with indivisible goods and unit demand. Our model is based on Gale-Shapley college admissions model, but can be applied to more general situations (for example for studying some auction markets). Studying such models may be very important from the point of view of looking for effective algorithms of computing competitive equilibria, as it was shown in the paper of Chen, Deng and Ghosh [2014]. We have shown that competitive equilibria in the unit demand models can be defined in different ways. The traditional definition, used in literature, needs restrictive assumption of zero pricing of unassigned

goods. In our definition of weak equilibrium there is no such assumption, yet, as we have proved, the two important properties of standard definition (maximality and stability with respect to changing the prices of unassigned goods) are still preserved. Thus the weaker notion of equilibrium may be, as we think, better suited for modelling real markets.

In the last section we have related the notion of equilibrium in our model with the classical notion of stable matching of Gale and Shapley. Hence the problem of looking for equilibria for such models can be reduced to the problem of looking for stable matchings, which, in general, is relatively easy task.

It is worth noting that similar results concerning relationships between equilibria and Gale-Shapley stability were proved recently by Hatfield et. al. [2013] and Herings [2015], but our model can not be embedded in these models (in Hatfield et. al. [2013] the utility functions are quasi-linear and in Herings [2015] there are no reservation prices in our sense). Hence it would be interesting to build a general market model which would include as special cases our model and the two above models and for which the relationship between equilibria and Gale-Shapley stability could be proved. But it needs further research.

## References

- Andersson T., Erlanson A. (2013), *Multi-Item Vickrey-English-Dutch Auctions*, „Games and Economic Behavior”, nr 81, s. 116-129.
- Azevedo E.M., Leshno J.D. (2014), *A supply and demand framework for two-sided matching markets*, working paper, <http://www.columbia.edu>, (last access: 8.09.2015).
- Chen N., Deng X., Ghosh A. (2014), *Competitive Equilibria in Matching Markets with Budgets*, arxiv.org.
- Gale D. (1960), *The theory of linear economic models*, The University of Chicago Press, Chicago.
- Gale D., Shapley L.S. (1962), *College Admissions and the Stability of Marriage*, „American Mathematical Monthly”, nr 69, s. 9-15.
- Hatfield J.W., Kominers S.D., Nichifor A., Ostrovsky M., Westkamp A. (2013), *Stability and Competitive Equilibrium in Trading Networks*, „Journal of Political Economy”, nr 5(121), s. 966-1005.
- Herings P.J. (2015), *Equilibrium and Matching under Price Control*, working paper RM/15/001, Maastricht University, Graduate School of Business and Economics.
- Mishra D., Talman D. (2010), *Characterization of the Walrasian equilibria of the assignment model*, „Journal of Mathematical Economics”, nr 46, s. 6-20.

- Shapley L.S., Shubik M. (1971/72), *The Assignment Game I: The Core*, „Int. Journal of Game Theory”, nr 1, s. 111-130.
- Świtalski Z. (2008), *Stability and equilibria in the matching models*, „Scientific Research of the Institute of Mathematics and Computer Science”, Częstochowa University of Technology, nr 2(7), s. 77-85.
- Świtalski Z. (2014), *The structure of the set of vectors of equilibrium prices in the market model of Gale-Shapley type* (in Polish), „Przegląd Statystyczny”, nr 1(61), s. 15-26.

#### PEWNE WŁASNOŚCI RÓWNOWAGI KONKURENCYJNEJ I SKOJARZEŃ STABILNYCH W MODELU RYNKU TYPU GALE'A-SHAPLEYA

**Streszczenie:** W artykule zbadano pewne własności równowagi konkurencyjnej w modelu rynku typu Gale'a-Shapleya. Podano formalną definicję równowagi, w tym modelu bez założenia o zerowaniu się cen dóbr nieprzydzielonych. Udowodniono też, że alokacje równowagi konkurencyjnej w tym modelu są skojarzeniami silnie stabilnymi w sensie Gale'a-Shapleya (i na odwrót).

**Słowa kluczowe:** model rynku typu Gale'a-Shapleya, równowaga konkurencyjna, skojarzenie stabilne, dobro niepodzielne, model rynku z jednostkowym popytem.



**Grzegorz Tarczyński**

Uniwersytet Ekonomiczny we Wrocławiu  
Wydział Zarządzania, Informatyki i Finansów  
Katedra Badań Operacyjnych  
grzegorz.tarczyński@ue.wroc.pl

## WYBÓR SPOSOBU SKŁADOWANIA TOWARÓW W AUTOMATYCZNYM MAGAZYNIE NIEWIELKICH JEDNOSTEK ŁADUNKOWYCH

**Streszczenie:** W artykule opisano zasady działania magazynów automatycznych typu *miniload* i porównano kilka koncepcji składowania towarów. Analizie poddany został wariant magazynu, w którym w jednej lokalizacji składowane mogą być dwie kowety z towarami. Opisane w literaturze składowanie oparte na podziale na grupy towarów w oparciu o współczynnik rotacji (zgodnie z klasyfikacją ABC) może dla analizowanego wariantu powodować pewne trudności i w efekcie nie zawsze prowadzić do redukcji średniego czasu pobrania towaru. W pracy podano pewne modyfikacje tego rozwiązania. Wyniki opracowano z wykorzystaniem autorskiego narzędzia symulacyjnego.

**Słowa kluczowe:** kompletacja zamówień, symulacje, magazynowanie.

### Wprowadzenie

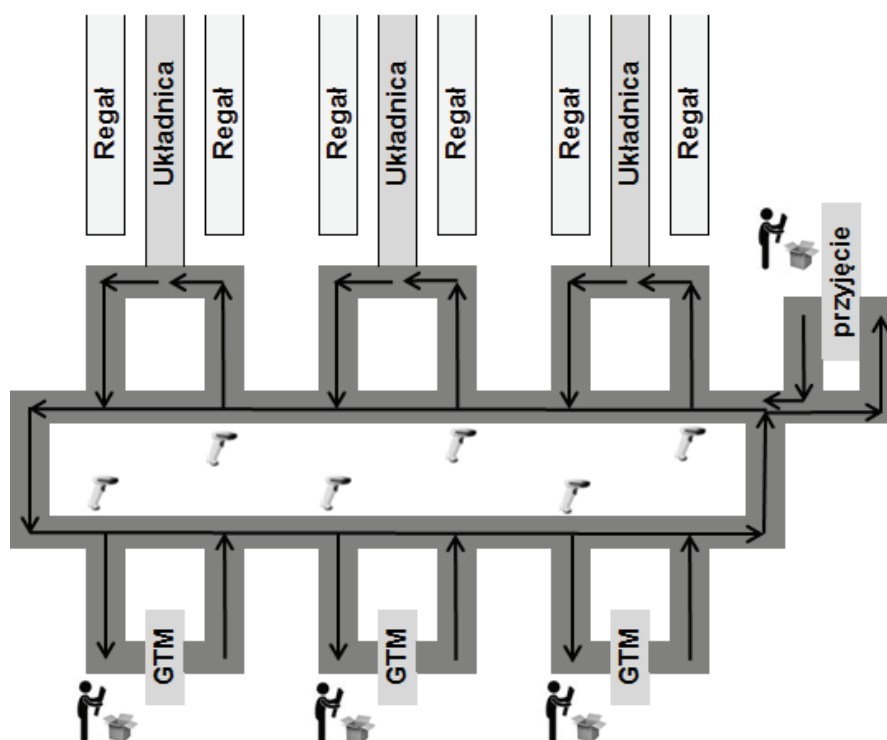
Magazynowanie towarów obejmuje procesy pobrania wyrobów, odłożenia ich na miejsca przechowywania, kompletację oraz ich zapakowanie i wysyłkę do klienta. Każda operacja generuje koszty, istnieje więc potrzeba ich optymalizacji. Według różnych badań naukowych najdroższy, bo powodujący aż 55% kosztów operacyjnych magazynu, jest proces kompletacji towarów [Bartholdi i Hackman, 2011]. Z tego powodu wiele firm koncentruje swoje wysiłki na optymalizacji tego właśnie procesu i (przynajmniej częściowo) zastępuje tradycyjne rozwiązania kompletacji ręcznej typu „człowiek do towaru” systemami automatycznymi, które pozwalają na znaczącą redukcję czasów, a więc i kosztów kompletacji. Do efektywnego przechowywania i szybkiej kompletacji towarów o małych gabary-

tach wykorzystać można automatyczne magazyny niewielkich jednostek ładunkowych (ang. *Miniload Automated Storage/Retrieval Systems (AS/RS)*). Celem artykułu jest porównanie czasów kompletacji zamówień dla różnych sposobów składowania towarów w magazynach AS/RS. Zbadany zostanie słabo opisany w literaturze przypadek, w którym w jednej lokalizacji przechowywane są dwie kuwety z towarami.

## 1. Automatyczne magazyny niewielkich jednostek ładunkowych

Magazyny automatyczne typu *miniload* składają się z kilku stanowisk GTM (ang. *Goods-To-Man*), strefy składowania towarów, stanowiska przyjęcia towarów i przenośnika taśmowego w kształcie pętli, zwanego z języka angielskiego *loop* (rys. 1). Towary na stanowisku przyjęcia wkładane są przez pracowników magazynowych do pojemników (kuwet), które opatrzone są kodami kreskowymi. Następnie kuwety umieszcza się na przenośniku taśmowym, który dzięki systemowi skanerów kodów kreskowych przemieszcza kuwetę do odpowiedniej alejki, w której składowane są towary, a następnie za pośrednictwem urządzenia służącego do automatycznego składowania i pobierania towarów (zwanego układnicą) na odpowiednie miejsce składowania w regale. Z kolei podczas odwrotnego procesu kompletacji kuwety transportowane są najpierw z regałów poprzez układnicę na przenośnik taśmowy, a następnie na właściwe stanowisko GTM, gdzie pracownik pobiera odpowiednią liczbę towarów, po czym za pośrednictwem przenośnika taśmowego i układnicy kuweta wraca na miejsce przechowywania (niekoniecznie to samo, z którego została pobrana).

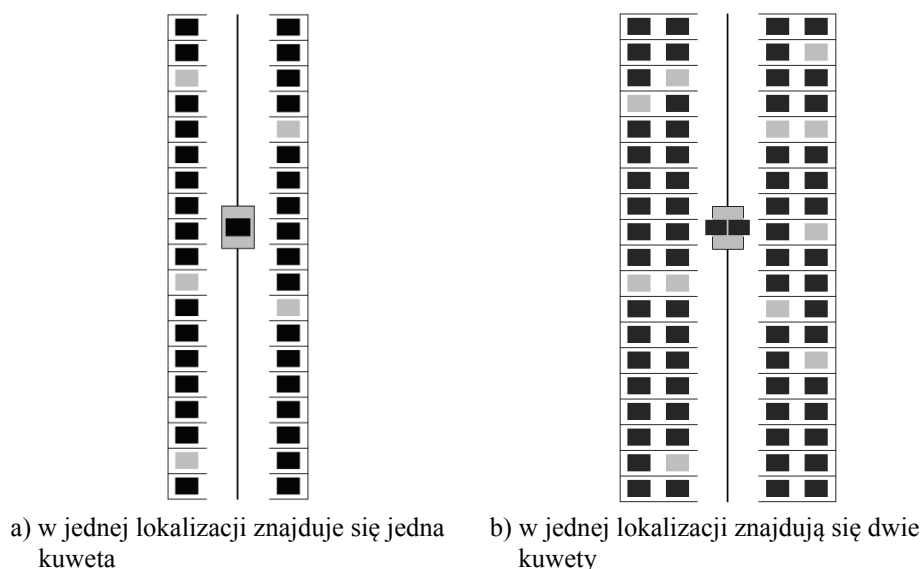
W literaturze analiza automatycznych magazynów niewielkich jednostek ładunkowych ograniczona jest do jednej układnicy i skupia się zazwyczaj na problemie optymalizacji czasu pobrania towarów przez układnicę. Zagadnienie to rozwiązać można poprzez optymalizację składowania towarów o różnych współczynnikach rotacji. Możliwe są dwie metody badania czasu pobrania towarów: analityczna, gdzie autorzy opracowują odpowiednie wzory matematyczne, np. [Bozer i White, 1984], [Bozer i White, 1990], [Bozer i White, 1996], [Hu i in., 2005], [Park, Foley, Frazelle, 2006], [Lerher i in., 2010]) i symulacyjna (np. [Güller i Hegmanns, 2014], [Andriansyah i in., 2008], [Andriansyah i in., 2011]. W innych pracach badania koncentrują się na optymalizacji samego procesu składowania towarów, dzięki czemu możliwa jest szybsza kompletacja [Atmaca i Ozturk, 2013].



**Rys. 1.** Automatyczny magazyn niewielkich jednostek ładunkowych

Źródło: Opracowanie własne.

W cytowanych pracach autorzy przyjęli najprostszy wariant organizacji pracy magazynu typu *miniload*: w regale na jednym polu przechowywana jest tylko jedna kuweta, którą jako jedyną w jednym cyklu może przewieźć układnica (rys. 2a). W praktyce powstają jednak systemy umożliwiające przechowywanie w jednej lokalizacji kilku kuwet, które mogą być jednocześnie transportowane. W artykule badania skoncentrują się na przypadku, w którym w jednej lokalizacji są miejsca na dwie kuwety, które mogą być przetransportowane za pośrednictwem układnicy w jednym cyklu (rys. 2b). Wariant taki jest trudniejszy do analizy, umożliwia jednak bardziej efektywne wykorzystanie powierzchni magazynowej, jak również szybszą realizację procesu kompletacji zamówień.



**Rys. 2.** Układnica i regały z kuwetami (rysunki przedstawiają jeden poziom składowania)

Źródło: Opracowanie własne.

## 2. Algorytm składowania i kompletacji towarów

W badaniach rozważania ograniczono do tylko jednej układnicy i przeanalizowano wpływ różnych sposobów ułożenia na regałach towarów szybko rotujących na średni czas pobrania kuwety przez układnicę i dostarczenia jej na przenośnik taśmowy. Podział na klasy przeprowadzony został zgodnie z regułą Pareto: przyjęto założenie, że 20% towarów przechowywanych w magazynie generuje 80% popytu (klasa A), 30% towarów generuje 15% popytu, a pozostałe 50% towarów należy do klasy C – łącznie stanowią zaledwie 5% całkowitego popytu na towary. Rozpatrzono cztery sposoby ułożenia towarów:

- kuwety z towarami z klasy A znajdują się najbliżej punktu I/O (przenośnika taśmowego, na który są odstawiane przez układnicę). Część magazynu z towarami z klasy A nosi nazwę strefy A i ma kształt kwadratu (układnica równocześnie porusza się w dwóch kierunkach – w pionie i w poziomie, dlatego przy wyznaczaniu odległości lokalizacji od punktu I/O można skorzystać z metryki Czebyszewa, stąd też kwadratowy kształt strefy). Jeśli ten sam towar przechowywany jest w wielu kuwetach, to wszystkie znajdują się w strefie A magazynu, a układnica może pobrać dowolną kuwetę. Towary z klasy B składowane są w strefie B magazynu, która znajduje się z większej odległości od

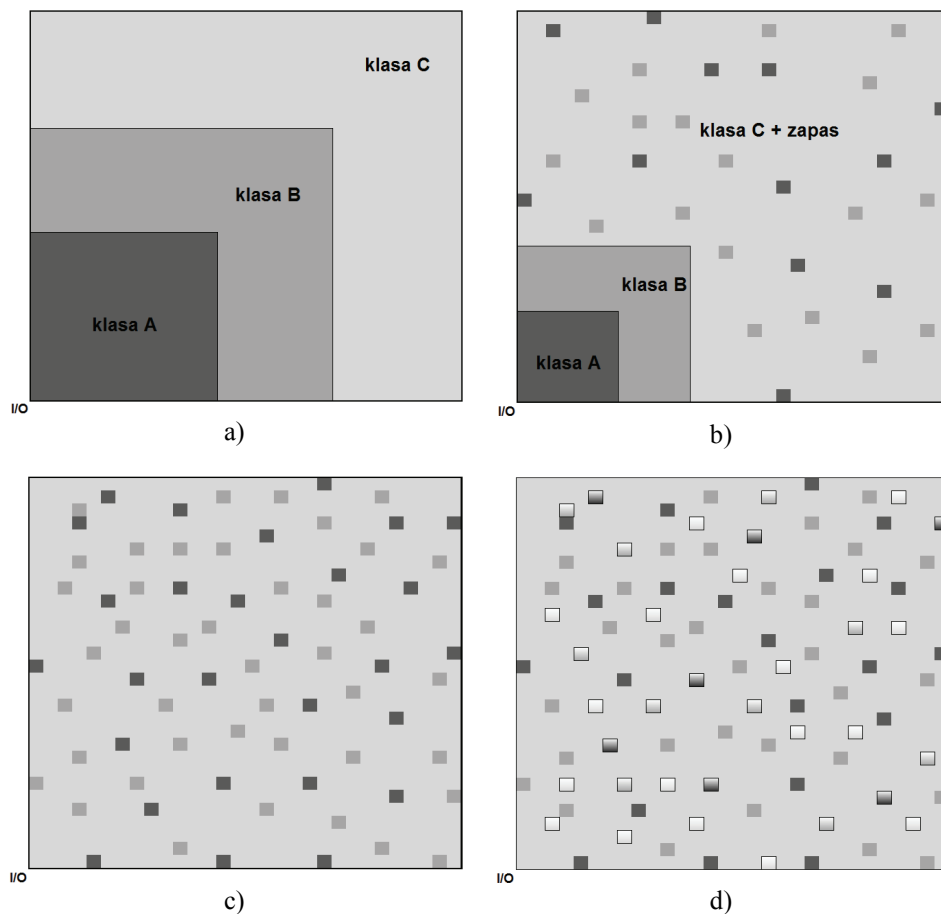


- punktu I/O, a pozostałe towary (klasa C) umieszczane są na końcu regału. Układnica może pobrać dowolną kuwetę z potrzebnym towarem (rys. 3a),
- b) w strefie A i B, które znajdują się najbliżej punktu I/O przechowywane są tylko kuwety z towarami z klas A i B z minimalnym ilostanem (z tego powodu strefy te są mniejsze niż w poprzednim wariantcie). Podczas procesu kompletacji pobierane są tylko kuwety z minimalnym ilostanem. Jeśli zamówienie opiewa na większą ilość towaru, to pracownik najpierw opróżnia kuwetę z minimalnym ilostanem, a następnie dostarczana jest inna kuweta z tym towarem (ze strefy C), z której pobiera się brakujący towar. Po pobraniu towaru kuweta ta umieszczona zostaje w strefie odpowiadającej klasie towaru, który zawiera (rys. 3b),
  - c) regał nie jest podzielony na strefy – przydział kuwet do lokalizacji odbywa się w sposób losowy – niezależnie od tego, jak szybko przechowywane towary rotują. Układnica może pobrać dowolną kuwetę z potrzebnym towarem (rys. 3c),
  - d) regał nie jest podzielony na strefy – przydział kuwet do lokalizacji odbywa się w sposób losowy – niezależnie od tego, jak szybko przechowywane towary rotują. Układnica może pobrać tylko kuwety z minimalnym ilostanem (rys. 3d).

W przypadku gdy w jednej lokalizacji przechowywana jest jedna kuweta, a układnica może jednocześnie transportować też tylko jedną kuwetę, ustalenie algorytmu wyznaczania trasy układnicy i wyznaczenie dystansu pokonywanego przez układnicę i czasu kompletacji jest banalne. Dla rozpatrywanego wariantu (możliwość przechowywania dwóch kuwet w jednej lokalizacji i jednoczesnego transportu dwóch kuwet) sprawa nieco się komplikuje. Możliwe są następujące sytuacje:

- a) układnica pobiera dwie kuwety z jednej lokalizacji (towary z obu znajdują się na zamówieniu) – sytuacja idealna,
- b) układnica pobiera jedną kuwetę z pewnej lokalizacji (kuweta musi znajdować się po wewnętrznej stronie korytarza lub być jedyną kuwetą aktualnie przechowywaną w danej lokalizacji), a następnie pobiera drugą kuwetę z innej lokalizacji (ta kuweta również musi znajdować się po wewnętrznej stronie korytarza lub być jedyną kuwetą aktualnie przechowywaną w danej lokalizacji). Układnica z dwoma kuwetami przemieszcza się do punktu I/O,
- c) układnica pobiera jedną kuwetę z pewnej lokalizacji (kuweta musi znajdować się po wewnętrznej stronie korytarza lub być jedyną kuwetą aktualnie przechowywaną w danej lokalizacji) i tylko z tą kuwetą przemieszcza się do punktu I/O,

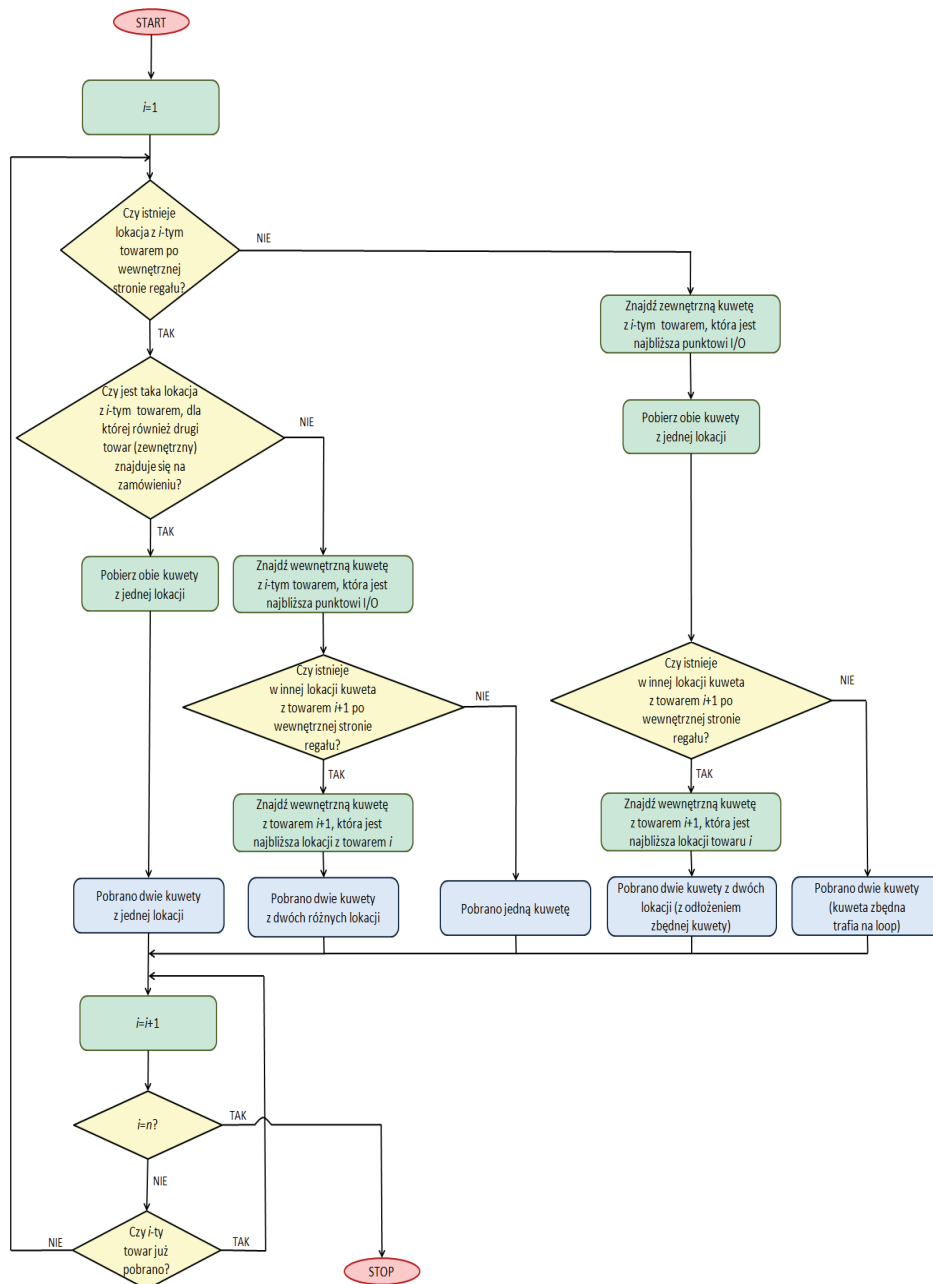
d) układnica pobiera dwie kuwety z pewnej lokalizacji (kuweta po wewnętrznej stronie korytarza jest zbędna, potrzebna kuweta znajduje się po zewnętrznej stronie), następnie odkłada niepotrzebną kuwetę na najbliższej pustej lokalizacji i pobiera kolejną kuwetę z innej lokalizacji (ta kuweta musi znajdować się po wewnętrznej stronie korytarza lub być jedyną kuwetą aktualnie przechowywaną w danej lokalizacji). Układnica z dwoma kuwetami przemieszcza się do punktu I/O,



**Rys. 3.** Sposoby rozmieszczenia i kompletacji towarów:

- a) składowanie zgodnie z klasyfikacją ABC, pobieranie dowolnej kuwety,
- b) składowanie losowe, pobieranie dowolnej kuwety,
- c) składowanie zgodnie z klasyfikacją ABC, pobieranie kuwety z minimalnym ilostanem,
- d) składowanie losowe, pobieranie kuwety z minimalnym ilostanem.

Źródło: Opracowanie własne.



Rys. 4. Schemat blokowy algorytmu kompletacji

Źródło: Opracowanie własne.

e) układnica pobiera dwie kuwety z pewnej lokalizacji (kuweta po wewnętrznej stronie korytarza jest zbędna, potrzebna kuweta znajduje się po zewnętrznej stronie) i z dwiema kuwetami przemieszcza się do punktu I/O. Kuweta z towarem, który nie będzie kompletowany nie trafia na stanowisko GTM, tylko pozostaje na przenośniku taśmowym, po czym zostaje odłożona na regał.

Propozycja algorytmu uwzględniającego opisane przypadki przedstawiona jest na rys. 4. Zaprezentowany schemat blokowy nie będzie generował rozwiązań minimalizujących czas pobrania towarów z jednego zamówienia, jednak rozwiązania będą lepsze niż w przypadku, gdy układnica jednocześnie transportuje tylko jedną kuwetę.

### 3. Wyniki obliczeń

Do przeprowadzenia obliczeń wykorzystano stworzone przez autora narzędzie symulacyjne **Miniload Real-Time Simulator** (autor w niedalekiej przyszłości planuje opublikować program wraz z dokumentacją w Internecie). Dla każdego z czterech wariantów decyzyjnych składowania towarów opisanych w poprzednim podrozdziale (rys. 3) wygenerowano 10 tys. zamówień. De Koster, Van Der Poort i Roodbergen [1998] pokazali, że dla tradycyjnej kompletacji typu „człowiek do towaru”, czasy kompletacji mają rozkład zbliżony do normalnego, a liczba replikacji wynosząca około 10 tys. jest w pełni wystarczająca (dla 95% poziomu ufności i błędu szacunku nieprzekraczającego 2%). Hipotezy te w dalszej części podrozdziału zweryfikowane zostaną dla czasów kompletacji towarów w magazynie automatycznym.

W magazynie automatycznym niezwykle istotna jest kolejność pobieranych przez układnicę kuwet. Nie jest możliwe pobranie towaru z nowego zamówienia, dopóki nie dostarczy się na stanowisko GTM wszystkich niezbędnych kuwet do realizacji poprzedniego zamówienia. Wielkość zamówienia (liczba różnych indeksów towarów na zamówieniu) może więc w pewien sposób wpływać na czas pobrania kuwet – możliwa jest bowiem sytuacja, w której układnica – aby zakończyć jedno zamówienie – musi pobrać tylko jedną (ostatnią z listy na zamówieniu) kuwetę. Autor w badaniach nie koncentrował się na wpływie wielkości zamówienia na czas kompletacji, dlatego we wszystkich doświadczeniach przyjęto stałą liczbę indeksów towarów na zamówieniu równą 20.

W tabeli 1 przedstawiono wyniki symulacji. Zdecydowanie najkrótszy średni dystans podczas realizacji jednego zamówienia układnica pokonała dla drugiego wariantu (ułożenie towarów zgodnie z klasyfikacją ABC, pobieranie

tylko kuwety z minimalnym ilostanem, rys. 3b). Wariant ten zajmuje jednak dopiero trzecie miejsce w rankingu szybkości pobierania towarów. Najkrótszy czas kompletacji uzyskano dla wariantu 1 – rozmieszczenie zgodne z klasyfikacją ABC, ale pobieranie dowolnej kuwety. Podczas kompletacji towarów przy drugim wariacie znacznie rzadziej pobierane były dwie kuwety z jednej lokalizacji oraz dwie kuwety z dwóch lokalizacji bez konieczności odłożenia zbędnej kuwety. Dla pierwszego wariantu – jeżeli układnica przewoziła dwie kuwety, to zazwyczaj pobranie drugiej poprzedzała konieczność odłożenia kuwety zbędnej pobranej wraz z pierwszą kuwetą, co powodowało wydłużenie czasu pracy układnicy.

Zdecydowanie najgorszy – zarówno pod względem dystansu pokonanego przez suwnicę, jak i czasu jej pracy, jest wariant czwarty – losowe ułożenie kuwet i pobieranie kuwety z minimalnym ilostanem.

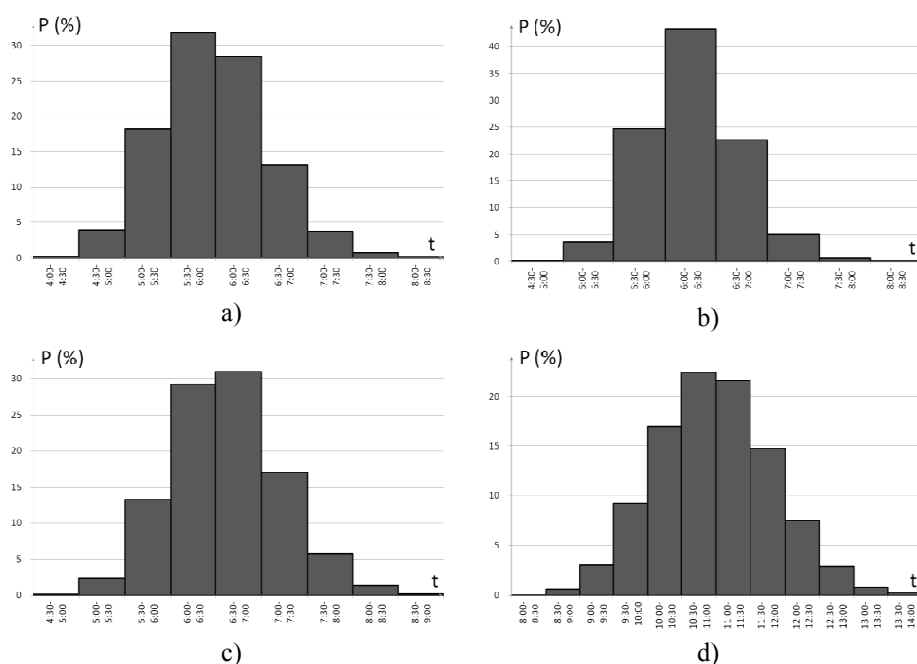
**Tabela 1.** Wyniki symulacji

|                                                                                          | ABC, dowolna kuweta | ABC, kuweta z minimalnym stanem | Losowe ułożenie, dowolna kuweta | Losowe ułożenie, kuweta z minimalnym stanem |
|------------------------------------------------------------------------------------------|---------------------|---------------------------------|---------------------------------|---------------------------------------------|
| Średni dystans [m]                                                                       | 602,53              | 379,89                          | 649,09                          | 1150,18                                     |
| Dwie kuwety z jednej lokalizacji [średnia liczba pobrań na 1 zamówienie]                 | 0,88                | 0,14                            | 0,51                            | 0,01                                        |
| Dwie kuwety z dwóch lokalizacji (bez odkładania) [średnia liczba pobrań na 1 zamówienie] | 8,77                | 2,76                            | 9,18                            | 2,58                                        |
| Jedna kuweta [średnia liczba pobrań na 1 zamówienie]                                     | 0,24                | 5,31                            | 0,21                            | 5,63                                        |
| Dwie kuwety z dwóch lokalizacji (z odłożeniem) [średnia liczba pobrań na 1 zamówienie]   | 0,24                | 4,45                            | 0,20                            | 4,59                                        |
| Średni czas [m:s]                                                                        | 5:58                | 6:36                            | 6:16                            | 10:58                                       |

Źródło: Opracowanie własne.

Na rys. 5 przedstawiono wykresy rozkładu prawdopodobieństwa czasu kompletacji zamówień dla każdego z czterech rozpatrywanych wariantów. Wizualna ocena pozwala stwierdzić, że w każdym przypadku są one zbliżone do rozkładu normalnego. Można więc sprawdzić, czy wielkość próby (liczba repli-

kacji) była wystarczająca. W tabeli 2 przedstawiono minimalne wartości liczby replikacji dla poziomów ufności równych 95%, 97% i 99,5% oraz błędu szacunku równemu 1s i 2s. Dla pierwszego i trzeciego wariantu liczba 10000 replikacji była wystarczająca nawet przy najostrzejszych kryteriach. Dla drugiego wariantu i bardzo wyśrubowanych parametrów  $d_x = 1s$  i  $1 - \alpha = 99,5\%$  zabrakło tylko 184 replikacji. Przy trzecim wariancie minimalna liczba replikacji może wynieść aż 20 356. Dla błędu szacunku równemu 2s i 99,5% poziom ufności dla każdego wariantu liczba replikacji była wystarczająca, podobnie dla błędu szacunku równemu 1s i 95% poziom ufności. Autor nie widział więc konieczności zwiększenia liczby replikacji.



**Rys. 5.** Rozkład prawdopodobieństwa czasu kompletacji zamówień dla wariantów:  
a) składowanie zgodnie z klasyfikacją ABC, pobieranie dowolnej kuwety,  
b) składowanie losowe, pobieranie dowolnej kuwety,  
c) składowanie zgodnie z klasyfikacją ABC, pobieranie kuwety z minimalnym ilostanem,  
d) składowanie losowe, pobieranie kuwety z minimalnym ilostanem.

Źródło: Opracowanie własne.

Tabela 2. Minimalna liczba replikacji

| Sposób rozmieszczenia i kompletacji towarów | Poziom<br>uwności | Min. liczba replikacji       |                              |
|---------------------------------------------|-------------------|------------------------------|------------------------------|
|                                             |                   | $d_{\bar{x}} = 1 \text{ s.}$ | $d_{\bar{x}} = 2 \text{ s.}$ |
| ABC, dowolna kuweta                         | $1-\alpha=95\%$   | 4685                         | 1171                         |
| Losowe ułożenie, dowolna kuweta             |                   | 2808                         | 702                          |
| ABC, kuweta z minimalnym stanem             |                   | 4965                         | 1241                         |
| Losowe ułożenie, kuweta z minimalnym stanem |                   | 9924                         | 2481                         |
| ABC, dowolna kuweta                         | $1-\alpha=97\%$   | 5744                         | 1436                         |
| Losowe ułożenie, dowolna kuweta             |                   | 3442                         | 861                          |
| ABC, kuweta z minimalnym stanem             |                   | 6087                         | 1522                         |
| Losowe ułożenie, kuweta z minimalnym stanem |                   | 12166                        | 3041                         |
| ABC, dowolna kuweta                         | $1-\alpha=99,5\%$ | 9610                         | 2403                         |
| Losowe ułożenie, dowolna kuweta             |                   | 5759                         | 1440                         |
| ABC, kuweta z minimalnym stanem             |                   | 10184                        | 2546                         |
| Losowe ułożenie, kuweta z minimalnym stanem |                   | 20356                        | 5089                         |

Źródło: Opracowanie własne.

## Podsumowanie

Automatyczne magazyny niewielkich jednostek ładunkowych umożliwiają redukcję czasu kompletacji zamówień w porównaniu z tradycyjnymi magazynami, gdzie towary pobierane są wg zasady „człowiek do towaru”. Samo wdrożenie systemu typu *miniload* nie jest jednak wystarczające – optymalizacja składowania towarów może spowodować dalsze znaczące skrócenie czasu pobrania towaru. Z przeprowadzonych badań wynika, że spośród czterech analizowanych wariantów najkrótszy czas kompletacji jednego zamówienia można uzyskać przy ułożeniu towarów zgodnie z klasyfikacją ABC i pobieraniu dowolnej kuwety z potrzebnym towarem. Rozwiązanie takie nie jest jednak pozbawione wad. Możliwość pobierania dowolnej kuwety powoduje, że kuwety wolniej się opróżniają, a stopień zapełnienia magazynu jest wyższy. Dlatego wybór rozwiązania powinien zależeć od preferencji decydenta: chęci minimalizacji czasu kompletacji zamówień lub lepszego wykorzystania powierzchni magazynowej. W obu przypadkach podział towarów na klasy ze względu na współczynnik rotacji i wydzielenie w magazynie stref składowania towarów z określonej klasy daje jednak lepsze wyniki niż składowanie losowe.

## Literatura

Andriansyah R., de Koning W.W.H., Jordan R.M.E., Etman L.F.P., Rooda J.E. (2008), *Simulation study of miniload-workstation order picking system*, Systems Engineering Report 7.

- Andriansyah R., De Koning W.W.H., Jordan R.M.E., Etman L.F.P., Rooda J.E. (2011), *A process algebra based simulation model of a miniload-workstation order picking system*, Computers in Industry, 62(3), s. 292-300.
- Atmaca E., Ozturk A. (2013), *Defining order picking policy: A storage assignment model and a simulated annealing solution in AS/RS systems*, Applied Mathematical Modelling, 37(7), s. 5069-5079.
- Bartholdi III J.J., Hackman S.T. (2011), *Warehouse and Distribution Science*, Georgia Institute of Technology, Atlanta.
- Bozer Y.A., White J.A. (1984), *Travel-time models for automated storage/retrieval systems*, IIE transactions, 16(4), s. 329-338.
- Bozer Y.A., White J.A. (1990), *Design and performance models for end-of-aisle order picking systems*, Management Science, 36(7), s. 852-866.
- Bozer Y.A., White J.A. (1996), *A generalized design and performance analysis model for end-of-aisle order-picking systems*, IIE transactions, 28(4), s. 271-280.
- De Koster R., Van Der Poort E., Roodbergen K.J. (1998), *When to apply optimal or heuristic routing of orderpickers*, Springer Berlin Heidelberg, s. 375-401.
- Güller M., Hegmanns T. (2014), *Simulation-Based Performance Analysis of a Miniload Multishuttle Order Picking System*, Procedia CIRP, 17, s. 475-480.
- Hu Y.H., Huang S.Y., Chen C., Hsu W.J., Toh A.C., Loh C.K., Song T. (2005), *Travel time analysis of a new automated storage and retrieval system*, Computers & Operations Research, 32(6), s. 1515-1544.
- Lerher T., Potrč I., Šraml M., Tollazzi T. (2010), *Travel time models for automated warehouses with aisle transferring storage and retrieval machine*, European Journal of Operational Research, 205(3), s. 571-583.
- Park B.C., Foley R.D., Frazelle, E.H. (2006), *Performance of miniload systems with two-class storage*, European Journal of Operational Research, 170(1), s. 144-155.

#### SELECTION OF METHOD OF STORAGE LOCATION ASSIGNMENT IN MINILOAD WAREHOUSES

**Summary:** In the paper the operating principles of the Miniload Automated Storage/Retrieval Systems were described and a few storage location assignment methods were developed and compared. The analysis included the variant in which in one slot two bins can be stored and the miniload crane transports one or two bins at the same time. Using the simple ABC classification in that case may cause some problems and not lead directly to the reduction of order-picking time. In the paper the other solutions were developed. The results were processed by the simulation tool made by the author of this paper.

**Keywords:** order-picking, simulations, warehousing.





### Grażyna Trzpiot

Uniwersytet Ekonomiczny w Katowicach  
Wydział Informatyki i Komunikacji  
Katedra Demografii i Statystyki Ekonomicznej  
grazyna.trzpiot@ue.katowice.pl

### Justyna Majewska

Uniwersytet Ekonomiczny w Katowicach  
Wydział Informatyki i Komunikacji  
Katedra Demografii i Statystyki Ekonomicznej  
justyna.majewska@ue.katowice.pl

## MODELOWANIE RYZYKA DŁUGOWIECZNOŚCI – UJĘCIE REGIONALNE

**Streszczenie:** W pracy poruszamy kwestię specyficznego ryzyka długowieczności, które polega na tym, że dana osoba dożyje dłuższego wieku, niż oczekiwała, co spowoduje całkowite lub częściowe wyczerpanie zasobów materialnych, jakie zgromadziła na starość (tzw. bankructwo emerytalne). Wykorzystano koncepcję znaną z nowoczesnych finansów – wartości zagrożonej – do oszacowania prawdopodobieństw bankructw emerytalnych dla wszystkich województw Polski. Do tego celu przedstawiono tablice trwania życia z 2013 r.

**Słowa kluczowe:** specyficzne ryzyko długowieczności, tablice trwania życia, prawdopodobieństwo ruiny, geometryczny ruch Browna.

### Wprowadzenie

Każdy żyjący człowiek zmierzy się z indywidualnym ryzykiem długowieczności – z ryzykiem specyficznym, które może doprowadzić do wyczerpania jego zasobów finansowych i doprowadzić do ruiny, zwanym bankructwem emerytalnym [Milevsky, 2006; Trzpiot i Majewska, 2015]. Projekcje dalszego przeciętnego trwania życia są następujące: „mężczyzna lub kobieta w dowolnym wieku żyjący lub żyjąca obecnie może oczekiwać (...), że przeżyje średnio o 10 lat dłużej niż przeciętnie żył mężczyzna lub żyła kobieta z generacji ich rodziców i o 20 lat dłużej niż przedstawiciele generacji ich dziadków” [prof. dr James W. Vaupel, Max Planck Institute for Demographic Research, Rostock, Germany]. Ryzyko długowieczności stanowi bardzo poważny problem dla polityki społecznej, a zwłaszcza systemów emerytalnych. Celem pracy jest przedstawienie koncepcji wyko-

rzystania wartości zagrożonej do modelowania specyficznego ryzyka długowieczności. W kontekście wypłat emerytur wykorzystujemy VaR jako prawdopodobieństwo zdarzenia, że emeryt zbankrutuje przed śmiercią (takie prawdopodobieństwo nazywamy prawdopodobieństwem ruiny).

## 1. Przeciętne dalsze trwanie życia w Polsce – zróżnicowanie przestrzenne

Przeciętne dalsze trwanie życia to miara statystyczna służąca do ustalenia liczby miesięcy, w których przeciętnie będzie pobierana emerytura. Średnie dalsze trwanie życia dla wieku emerytalnego jest ustalane wspólnie dla mężczyzn i kobiet i podawane w formie tablic dalszego trwania życia, corocznie przez GUS w terminie do dnia 31 marca. Na podstawie tablic ustalana jest wysokość emerytur na wnioski złożone od dnia 1 kwietnia do dnia 31 marca.

Życie ludzkie wydłuża się znacznie szybciej, niż przewiduje obowiązująca wcześniejsza prognoza demograficzna GUS do 2035 r. W 2012 r. przewidywana długość życia urodzonego Polaka wyniosła 72,7 lat, Polki – 81 lat. Według prognoz demografów, takiego wieku mieli dożywać mężczyźni urodzeni po 2015 r., a kobiety po 2020 r.

Ogłoszona przez GUS w 2014 r. prognoza ludności Polski do 2050 r. zgodna jest z ogólną tendencją światową (tabela 1).

**Tabela 1.** Oczekiwana długość życia dla kobiet – prognoza na lata 2020-2050

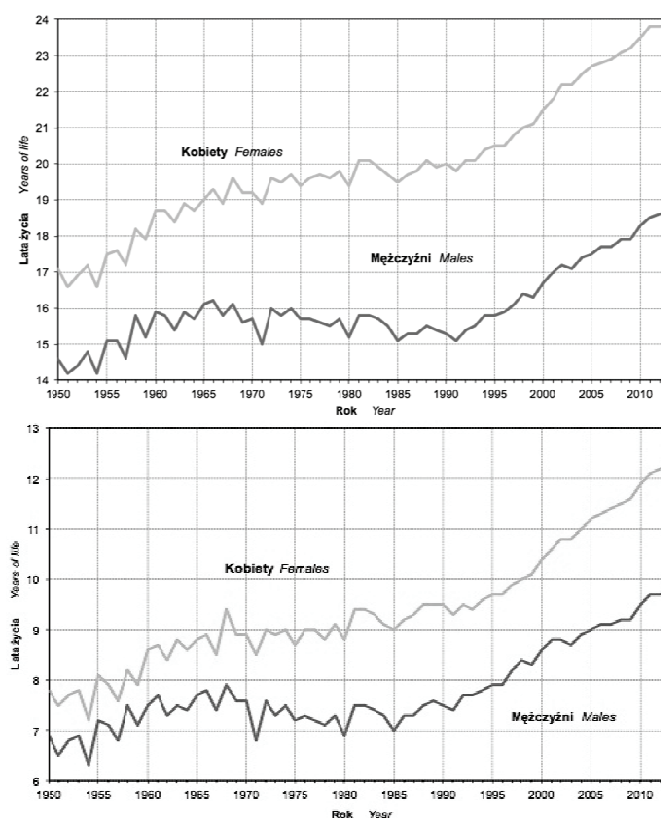
| Lata      | 2020 | 2025 | 2030 | 2035 | 2040 | 2045 | 2050 |
|-----------|------|------|------|------|------|------|------|
| Mężczyźni | 74,6 | 75,9 | 77,3 | 78,4 | 79,5 | 80,8 | 82,1 |
| Kobiety   | 82,1 | 83,0 | 84,0 | 84,8 | 85,6 | 86,5 | 87,5 |

Źródło: Opracowanie własne na podstawie Prognoza GUS [2014].

W prognozach demograficznych nie przewidziano tak dynamicznych zmian trendu długowieczności. Jeśli więc na podstawie tablic dalszego trwania życia została niedoszacowana długość życia osób starających się o emeryturę, to będą one pobierać świadczenia dłużej niż przewidywano. To z kolei oznacza, że będziemy potrzebowali na emerytury więcej pieniędzy, niż planuje się w dłuższej perspektywie. Potrzebne będzie więcej zasobów finansowych nie tylko na emerytury, ale także na opiekę nad osobami starszymi czy rozwój domów opieki dla seniorów.

Wydłużanie się życia w Polsce determinuje kilka czynników. Przede wszystkim sprzyja temu rosnące wykształcenie. Zdecydowanie zwiększyła się liczba osób z dyplomem wyższej uczelni. Takie osoby na ogół lepiej dbają o swoje zdrowie.

Polacy żyją dłużej również dzięki postępowi w medycynie oraz dostępności do tych osiągnięć w ramach Unii Europejskiej. W efekcie obecnie przeciętne życie mężczyzn jest o 6,8 lat dłuższe niż w najgorszej pod tym względem dekadzie lat 90. 1991 r. W przypadku kobiet przeciętne życie jest dłuższe o 5,9 lat (zob. rys. 1). W porównaniu z połową ubiegłego stulecia Polacy żyją dziś o 16,6 lat dłużej, a kobiety o 19,3 lat dłużej.



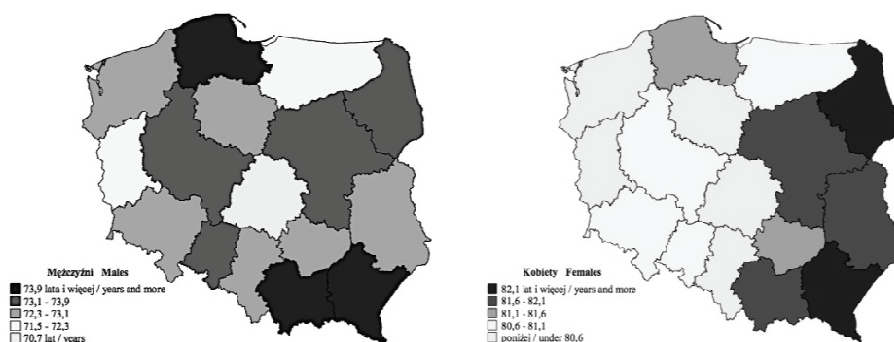
**Rys. 1.** Przeciętne dalsze trwanie życia osób w wieku 60 lat (góra) oraz w wieku 75 lat (dół)

Źródło: *Trwanie życia w 2013 r.*, GUS.

Notowane w latach 50. wydłużanie się przeciętnego trwania życia mężczyzn w starszym wieku uległo zahamowaniu w latach 60. Ponowny jego wzrost rejestrowano dopiero od połowy lat 80. Tym samym, w latach 1950-2013, dalsze trwanie życia 60-lątka wydłużyło się tylko o 4,1 lat (do 18,7 lat), a 75-lątka o 2,9 lat (do 9,8 lat). Wśród kobiet w tym wieku notowano stałą poprawę parametrów trwania życia. Dalsze trwanie życia 60-letniej kobiety wydłużyło się w latach 1950-2013 o 6,8 lat (do 23,9 lat), natomiast 75-letniej kobiety o 4,5 lat (do 12,3 lat) (por. rys. 1).

W ostatniej dekadzie ubiegłego stulecia obserwowano istotny postęp w wydłużaniu się przeciętnego trwania życia we wszystkich województwach. Ta korzystna tendencja utrzymuje się nadal. Szczególnie dotyczy to mężczyzn zamieszkałych w województwie pomorskim, dla których w latach 1990-2013 średnie trwanie życia wydłużyło się o 8,1. W okresie tym najniższy wzrost notowano w województwie łódzkim (5,4) i lubelskim (5,9). Dla kobiet największy przyrost parametrów trwania życia zanotowano także w województwie pomorskim (6,5), natomiast najmniejszy w województwie lubelskim (5,2) [GUS, 2014].

W Polsce występuje duże zróżnicowanie przeciętnego trwania życia w przekroju wojewódzkim. W 2013 r. rozpiętość między najwyższym a najniższym wskaźnikiem wśród 16 województw wynosiła dla mężczyzn 4,1 lat. Najkrócej żyli mężczyźni mieszkający na terenie województwa łódzkiego (70,7 lat), natomiast najdłużej w województwie podkarpackim i małopolskim (74,8 lat). Wśród kobiet zróżnicowanie jest mniejsze i wynosi 2,3 roku. Kobiety żyją najkrócej w województwie lubuskim, łódzkim i śląskim (80,1 lat). Kobiety w województwach podkarpackim i podlaskim dożywają wieku ponad 82,2 lat. Ogólnie można stwierdzić, że we wszystkich województwach leżących na terenach Polski wschodniej i południowo-wschodniej przeciętne trwanie życia kobiet jest wyższe od średniej krajowej (rys. 2).



**Rys. 2.** Przeciętne trwanie życia w wieku 60 lat według województw w 2013 r.

Źródło: *Trwanie życia w 2013 r.*, GUS.

## 2. Specyficzne ryzyko długowieczności

Ze względu na niepewność co do przyszłego spadku śmiertelności i zwiększania się przewidywanej długości życia, fundusze emerytalne i instytucje wypłacające dożywotnie emerytury kapitałowe są narażone na ryzyko długowiecz-

ności, w zmieniających się warunkach demograficznych muszą zapewnić kolejnym rocznikom wypłatę świadczeń dożywotnich po zakończeniu aktywności zawodowej. Aby ograniczyć ryzyko niespodziewanego wzrostu wysokości zobowiązań, organy regulacyjne i decydenci powinni zadbać, aby fundusze emerytalne i instytucje wypłacające dożywotnie emerytury kapitałowe korzystały z regularnie uaktualnianych tabel umieralności uwzględniających przyszły spadek śmiertelności i zwiększanie się przewidywanej długości życia [OECD Pension Outlook, 2014].

Według Międzynarodowego Stowarzyszenia Nadzorów Ubezpieczeniowych IAIS (2014) ponoszący ryzyko długowieczności – rządy państw, fundusze emerytalne i ubezpieczyciele na życie – będą musieli płacić dodatkowo od 450 mln do 1 mld USD łącznie za każdy rok niedoszacowania długowieczności.

Ryzyko długowieczności dotyczy zarówno jednostek, jak i całych roczników demograficznych. Indywidualne, specyficzne ryzyko długowieczności polega na tym, że dana osoba dożyje dłuższego wieku niż oczekiwała, co spowoduje całkowite lub częściowe wyczerpanie zasobów materialnych, jakie zgromadziła na starość [Pitacco i in., 2009]. W tym przypadku możemy co najwyżej mówić o ryzyku w znaczeniu neutralnym (możliwość osiągnięcia wyniku różnego od zamierzonego). Istnieje też zagregowane ryzyko długowieczności polegające na tym, że w danym roczniku (kohorcie) średnia długość życia będzie dłuższa niż przewidywano. Inaczej mówiąc, jest to ryzyko niewłaściwego oszacowania przyszłego trendu współczynnika śmiertelności [Bartkowiak, 2011; Trzpiot, Majewska, 2015]. Łącznie indywidualne i zagregowane ryzyko długowieczności stanowi całkowite ryzyko długowieczności [por. Blake i in., 2010].

Indywidualne ryzyko długowieczności, którego realizacja może przynieść dotkliwe negatywne następstwa dla poszczególnych jednostek, nie stanowi jednak zagrożenia dla stabilności finansowej systemów emerytalnych.

### 3. Finansowy plan emerytalny a prawdopodobieństwo ruiny

W finansowych planach systemu emerytalnego pojawiają się dwa zasadnicze pytania: ile zaoszczędzić podczas fazy akumulacji kapitału emerytalnego i ile wydawać rocznie w fazie deakumulacji?

Biorąc pod uwagę losowe aspekty przedstawionego problemu, analogiczne podejście znajdujemy na rynku kapitałowym – wartość narażona na ryzyko, *Value at Risk*. VaR wyznacza stratę, która może się pojawić przy zadanym prawdopodobieństwie (poziomie tolerancji). W kontekście wypłat emerytur spojrzenie to może być wykorzystane jako prawdopodobieństwo zdarzenia, że emeryt-uczestnik umrze przed wyczerpaniem środków (takie prawdopodobieństwo nazywamy prawdopodobieństwem ruiny).

Zakładamy, że plan emerytalny jest stochastycznym procesem – geometrycznym ruchem Browna  $B_t$  z dryfem  $\mu$  oraz zmiennością  $\sigma$  (np. Malliaris and Brock, 1982). Wysokość kapitału  $S_t$  w czasie  $t$

$$S_t = S_0 \cdot e^{B_t(\mu, \sigma)} = S_0 \cdot e^{\mu t + \sigma \cdot B_t} \quad (1)$$

W szczególności rozkład  $S_t$  jest log-normalny.

Drugim aspektem losowości planu emerytalnego jest liczba lat, jaką mają do przeżycia w ciągu roku osoby w wieku  $x$  ukończonych lat (oznaczana przez  $T_x$ ), którą w najprostszy sposób modeluje się przy założeniu, że natężenie umieralności  $\lambda_x$  jest funkcją wykładniczą:

$${}_t p_x = \exp \left\{ - \int_x^{x+t} \lambda_x ds \right\} = e^{-\lambda_x \cdot t} \quad (2)$$

${}_t p_x$  jest prawdopodobieństwem przeżycia roku przez osobę w wieku  $x$  ukończonych lat. Przeciętne dalsze trwanie życia osoby w wieku  $x$  ukończonych lat zapisujemy jako:

$$e_x = E(T_x) = \frac{1}{\lambda_x} \quad (3)$$

Z (1) i (2) otrzymujemy bieżącą wysokość świadczenia emerytalnego  $PV_x$

$$PV_x = \int_0^{T_x} e^{-(\mu t + \sigma \cdot B_t)} dt \quad (4)$$

Ostatecznie, zapisujemy prawdopodobieństwo ruiny [Dufresne, 1990; Milevsky, 1997; Milevsky, 2006] jako

$$P(PV_x > w) = P \left( \int_0^{T_x} e^{-(\mu t + \sigma \cdot B_t)} dt > w \right) \quad (5)$$

Na potrzebę oszacowania prawdopodobieństwa ruiny stosuje się następujące przybliżenie

$$P(PV_x > w) \sim \frac{1}{\beta^\alpha \Gamma(\alpha)} \int_0^{1/w} z^{\alpha-1} \exp \left( -\frac{z}{\beta} \right) dz = 1 - \frac{1}{\beta^\alpha \Gamma(\alpha)} \int_0^w y^{-(\alpha+1)} \exp \left( -\frac{1}{\beta y} \right) dy$$

gdzie  $\alpha = \frac{2\mu + 4\lambda_x}{\sigma^2 + \lambda_x} - 1$ ,  $\beta = \frac{\sigma^2 + \lambda_x}{2}$  oraz  $\Gamma(\alpha)$  jest funkcją gamma

$$\Gamma(\alpha) = \int_0^{\infty} z^{\alpha-1} e^{-z} dz.$$

#### 4. Analiza symulacyjna prawdopodobieństwa ruiny – zróżnicowanie regionalne

Proces stochastyczny opisany w rozdz. 3 stanowi podstawę do oszacowania prawdopodobieństw ruiny dla województw w Polsce. Dysponujemy dwoma rodzajami danych:

- dane finansowe: techniczna stopa procentowa, która decyduje o wysokości składki netto na ubezpieczenie (inaczej zysk, jaki towarzystwa zakładają, że osiągnie z inwestycji), w badaniu określamy stopę techniczną na poziomie 2,25%,
- tablice trwania życia w poszczególnych województwach Polski w 2013 r. w podziale na kobiety i mężczyzn (na podstawie [www.stat.gov.pl](http://www.stat.gov.pl)).

Wyznaczono prawdopodobieństwa ruiny dla osób w wieku 60 lat w zależności od założonych poziomów wydatkowania emerytury  $1/w$  (tj. 0,01; 0,02; 0,03;...; 0,1), gdzie  $w$  oznacza zgromadzone środki w momencie przejścia na emeryturę w wieku  $x$ . Dla przykładu poziom 0,06 oznacza, że przy zgromadzonej kwocie 500 000 zł wysokość miesięczna emerytury będzie wynosić 2500 zł. Rozważamy trzy scenariusze strategii inwestycyjnych w zależności od poziomu parametru dryfu i parametru zmienności [za Cipra, 2010]:

$\mu = 1\%$   $\sigma = 5\%$  – strategia konserwatywna inwestycyjna,

$\mu = 2,25\%$   $\sigma = 5\%$  – strategia legislacyjna inwestycyjna,

$\mu = 5\%$   $\sigma = 10\%$  – strategia efektywna inwestycyjna.

Wyniki oszacowań prawdopodobieństw ruiny w podziale na płeć oraz strategię inwestycyjne przedstawiają tabele 2-6.

Przy założeniu realizacji strategii konserwatywnej największe prawdopodobieństwo bankructwa na emeryturze (zob. tabele 2 i 3, przy wskaźniku wydatkowania na poziomie 0,06) otrzymujemy dla mężczyzn mieszkających w województwie lubelskim, lubuskim i łódzkim (ok. 0,44-0,45), a wśród kobiet – w województwie warmińsko-mazurskim i dolnośląskim (odpowiednio 0,54 i 0,50). Najniższe prawdopodobieństwo dla mężczyzn jest w województwie warmińsko-mazurskim (0,30), dla kobiet w województwie łódzkim i śląskim (0,43).

**Tabela 2.** Prawdopodobieństwa ruiny dla  $\mu = 1\%$   $\sigma = 5\%$  w grupie mężczyzn w wieku 60 lat

| Województwo         | 0,01 | 0,02 | 0,03 | 0,04 | 0,05 | 0,06 | 0,07 | 0,08 | 0,09 | 0,1  |
|---------------------|------|------|------|------|------|------|------|------|------|------|
| Dolnośląskie        | 0,4  | 2,7  | 7,5  | 14,4 | 22,9 | 32   | 41,3 | 50,1 | 58,2 | 65,4 |
| Kujawsko-Pomorskie  | 0,4  | 2,6  | 7,4  | 14,3 | 22,7 | 31,7 | 41,1 | 49,9 | 58   | 65,2 |
| Lubelskie           | 0,4  | 2,9  | 8    | 21,7 | 32,9 | 44,2 | 54,7 | 64   | 71,9 | 78,4 |
| Lubuskie            | 0,4  | 2,6  | 7,2  | 21,2 | 32,9 | 44,2 | 54,7 | 64   | 71,9 | 78,3 |
| Łódzkie             | 0,3  | 2,6  | 7,3  | 21,7 | 33   | 44,2 | 54,7 | 64   | 72   | 78,3 |
| Małopolskie         | 0,5  | 3,1  | 8,5  | 16,3 | 25,6 | 35,4 | 45   | 54,1 | 62,3 | 69,4 |
| Mazowieckie         | 0,4  | 3    | 8,4  | 16   | 25,2 | 34,9 | 44,5 | 53,5 | 61,7 | 68,8 |
| Opolskie            | 0,4  | 2,7  | 7,6  | 14,7 | 23,3 | 32,5 | 41,9 | 50,7 | 58,8 | 66,1 |
| Podkarpackie        | 0,4  | 3,2  | 9    | 17,2 | 26,7 | 36,8 | 46,7 | 55,8 | 64   | 71   |
| Podlaskie           | 0,4  | 2,8  | 8    | 15,3 | 24,2 | 33,7 | 43,2 | 52,2 | 60,3 | 67,5 |
| Pomorskie           | 0,4  | 1,9  | 8,1  | 15,6 | 24,5 | 34   | 43,6 | 53   | 60,7 | 67,9 |
| Śląskie             | 0,3  | 2,6  | 7,2  | 14   | 22,3 | 31,3 | 40,5 | 49,2 | 57,3 | 64,5 |
| Świętokrzyskie      | 0,4  | 2,7  | 7,7  | 14,9 | 23,6 | 32,9 | 42,3 | 51,2 | 59,4 | 66,6 |
| Warmińsko-Mazurskie | 0,4  | 1,5  | 7,1  | 13,8 | 22   | 30,9 | 40   | 48,8 | 56,8 | 64,1 |
| Wielkopolskie       | 0,4  | 2,7  | 7,7  | 14,9 | 23,9 | 32,9 | 42,3 | 51,2 | 59,3 | 66,6 |
| Zachodniopomorskie  | 0,3  | 2,7  | 7,6  | 14,6 | 23,1 | 32,4 | 41,7 | 50,6 | 58,7 | 65,9 |
| POLSKA              | 0,4  | 2,7  | 7,4  | 14,5 | 23,0 | 32,2 | 41,4 | 50,2 | 58,4 | 65,6 |

Źródło: Opracowanie własne.

**Tabela 3.** Prawdopodobieństwa ruiny dla  $\mu = 1\%$   $\sigma = 5\%$  w grupie kobiet w wieku 60 lat

| Województwo         | 0,01 | 0,02 | 0,03 | 0,04 | 0,05 | 0,06 | 0,07 | 0,08 | 0,09 | 0,1  |
|---------------------|------|------|------|------|------|------|------|------|------|------|
| Dolnośląskie        | 0,6  | 4,5  | 12   | 22,2 | 33,6 | 50   | 55,5 | 64,8 | 72,6 | 79   |
| Kujawsko-Pomorskie  | 0,2  | 4,4  | 11,7 | 21,7 | 32,9 | 44,2 | 54,7 | 64   | 71,9 | 78,9 |
| Lubelskie           | 0,7  | 4,7  | 12,5 | 21,7 | 32,9 | 44,2 | 54,7 | 64   | 71,9 | 78,3 |
| Lubuskie            | 0,6  | 4,4  | 11,8 | 21,7 | 32,9 | 44,2 | 54,7 | 64   | 71,9 | 78,4 |
| Łódzkie             | 0,5  | 4,2  | 11,3 | 21   | 32   | 43,2 | 53,6 | 62,9 | 70,8 | 77,4 |
| Małopolskie         | 0,7  | 4,7  | 12,7 | 23,2 | 34,9 | 46,5 | 57,2 | 66,4 | 74,1 | 80,4 |
| Mazowieckie         | 0,7  | 4,7  | 12,7 | 23,3 | 34,9 | 46,5 | 57,2 | 66,4 | 74,1 | 80,4 |
| Opolskie            | 0,6  | 4,4  | 11,9 | 22   | 33,3 | 44,6 | 55,1 | 64,4 | 72,3 | 78,7 |
| Podkarpackie        | 0,7  | 4,8  | 12,8 | 23,6 | 35,4 | 47,1 | 57,7 | 66,9 | 74,6 | 80,8 |
| Podlaskie           | 0,7  | 4,8  | 12,8 | 23,5 | 35,2 | 47   | 57,5 | 66,8 | 74,5 | 80,7 |
| Pomorskie           | 0,6  | 4,6  | 12,3 | 22,7 | 34,2 | 45,6 | 56,2 | 65,5 | 73,3 | 79,7 |
| Śląskie             | 0,6  | 4,2  | 11,3 | 21   | 32   | 43,2 | 53,6 | 62,9 | 70,8 | 77,4 |
| Świętokrzyskie      | 0,6  | 4,6  | 12,3 | 22,7 | 31,2 | 45,7 | 56,5 | 65,5 | 73,2 | 79,6 |
| Warmińsko-Mazurskie | 0,6  | 4,5  | 12,1 | 22,3 | 33,7 | 54,2 | 55,8 | 65   | 72,8 | 79,2 |
| Wielkopolskie       | 0,5  | 4,3  | 11,7 | 21,7 | 33   | 44,3 | 54,8 | 64   | 72   | 78,4 |
| Zachodniopomorskie  | 0,6  | 4,4  | 11,9 | 22   | 33,4 | 44,7 | 55,3 | 64,6 | 72,4 | 78,8 |
| POLSKA              | 0,6  | 4,5  | 12,1 | 22,4 | 33,8 | 45,2 | 55,8 | 65,1 | 72,9 | 79,3 |

Źródło: Opracowanie własne.

Przy założeniu realizacji strategii legislacyjnej największe prawdopodobieństwo bankructwa na emeryturze (zob. tabele 3 i 4, przy wskaźniku wydatkowania na poziomie 0,06) dla mężczyzn mieszkających w województwie lubelskim, lubuskim, łódzkim i małopolskim (0,22), a wśród kobiet – w województwie



podkarpackim i podlaskim (0,34). Najniższe prawdopodobieństwo dla mężczyzn jest w województwie warmińsko-mazurskim i śląskim (23%), dla kobiet w województwie dolnośląskim (0,23).

**Tabela 4.** Prawdopodobieństwa ruiny dla  $\mu = 2,25\%$   $\sigma = 5\%$  w grupie mężczyzn w wieku 60 lat

| Województwo         | 0,01 | 0,02 | 0,03 | 0,04 | 0,05 | 0,06 | 0,07 | 0,08 | 0,09 | 0,1  |
|---------------------|------|------|------|------|------|------|------|------|------|------|
| Dolnośląskie        | 0,1  | 1,2  | 4    | 8,8  | 15,3 | 23   | 31,4 | 39,9 | 48,1 | 55,9 |
| Kujawsko-Pomorskie  | 0,1  | 1,2  | 4    | 8,9  | 15,3 | 23,1 | 31,4 | 39,9 | 48,1 | 55,9 |
| Lubelskie           | 0,1  | 1,3  | 6,1  | 13   | 21,9 | 32   | 42,2 | 52   | 60,9 | 68,8 |
| Lubuskie            | 0,1  | 1,1  | 6,1  | 13   | 21,9 | 32   | 42,2 | 52   | 61   | 68,7 |
| Łódzkie             | 0,1  | 1,2  | 6,1  | 13   | 21,9 | 32   | 42,2 | 52   | 61   | 68,8 |
| Małopolskie         | 0,2  | 1,3  | 4,6  | 9,9  | 17,1 | 25,4 | 34,3 | 43,4 | 51,8 | 59,7 |
| Mazowieckie         | 0,1  | 1,3  | 4,5  | 9,8  | 16,8 | 25,1 | 34,8 | 42,8 | 51,3 | 59,2 |
| Opolskie            | 0,1  | 1,2  | 4,2  | 9    | 15,6 | 23,4 | 31,8 | 40,4 | 48,7 | 56,5 |
| Podkarpackie        | 0,2  | 1,4  | 4,8  | 10,4 | 17,9 | 26,5 | 35,7 | 44,8 | 53,4 | 61,3 |
| Podlaskie           | 0,1  | 1,3  | 4,3  | 9,4  | 16,2 | 24,2 | 32,8 | 41,6 | 50   | 57,8 |
| Pomorskie           | 0,2  | 1,3  | 4,3  | 9,5  | 16,4 | 24,5 | 33,2 | 42   | 50,3 | 58,2 |
| Śląskie             | 0,1  | 1,2  | 3,9  | 8,6  | 14,9 | 22,5 | 30,7 | 39,1 | 47,3 | 55   |
| Świętokrzyskie      | 0,2  | 1,2  | 4,2  | 9,1  | 15,8 | 23,6 | 32,2 | 40,8 | 49,1 | 56,9 |
| Warmińsko-Mazurskie | 0,1  | 1,1  | 3,9  | 8,5  | 14,7 | 22,2 | 30,3 | 38,7 | 46,9 | 54,5 |
| Wielkopolskie       | 0,1  | 1,2  | 4,2  | 9,1  | 15,8 | 23,6 | 32,2 | 40,8 | 49,2 | 56,9 |
| Zachodniopomorskie  | 0,1  | 1,2  | 4,1  | 8,9  | 15,5 | 23,3 | 31,7 | 40,2 | 48,5 | 56,3 |
| POLSKA              | 0,1  | 1,2  | 4,1  | 8,9  | 15,4 | 23,1 | 31,4 | 40,0 | 48,3 | 56,0 |

Źródło: Opracowanie własne.

Przy założeniu realizacji strategii efektywnej największe prawdopodobieństwo bankructwa na emeryturze (zob. tabele 5 i 6, przy wskaźniku wydatkowania na poziomie 0,06) dla mężczyzn mieszkających w województwie lubuskim (0,25), a wśród kobiet – w województwie podkarpackim i podlaskim (0,19). Najniższe prawdopodobieństwo dla mężczyzn jest w województwie śląskim i warmińsko-mazurskim (0,13), dla kobiet w województwie dolnośląskim (0,13).

**Tabela 5.** Prawdopodobieństwa ruiny dla  $\mu = 2,25\%$   $\sigma = 5\%$  w grupie kobiet w wieku 60 lat

| Województwo        | 0,01     | 0,02     | 0,03     | 0,04     | 0,05     | 0,06     | 0,07     | 0,08     | 0,09      | 0,1       |
|--------------------|----------|----------|----------|----------|----------|----------|----------|----------|-----------|-----------|
| <i>1</i>           | <i>2</i> | <i>3</i> | <i>4</i> | <i>5</i> | <i>6</i> | <i>7</i> | <i>8</i> | <i>9</i> | <i>10</i> | <i>11</i> |
| Dolnośląskie       | 0,1      | 1,2      | 4,1      | 8,8      | 15,3     | 23       | 31,4     | 40       | 48,1      | 55,9      |
| Kujawsko-Pomorskie | 0,2      | 1,8      | 6,1      | 13       | 21,9     | 32       | 42,2     | 52       | 60,9      | 68,8      |
| Lubelskie          | 0,1      | 1,9      | 6,1      | 13       | 21,9     | 32       | 42,2     | 52,6     | 61        | 68,7      |
| Lubuskie           | 0,1      | 1,9      | 6,1      | 13       | 21,9     | 32       | 42,3     | 52       | 61        | 68,7      |
| Łódzkie            | 0,2      | 1,7      | 5,9      | 12,6     | 21,4     | 31,2     | 41,3     | 51       | 59,9      | 67,7      |
| Małopolskie        | 0,2      | 1,9      | 6,5      | 13,9     | 23,3     | 33,7     | 44,3     | 54,3     | 63,2      | 70,9      |
| Mazowieckie        | 0,2      | 1,9      | 6,5      | 13,9     | 23,3     | 33,7     | 44,3     | 54,3     | 63,2      | 70,9      |
| Opolskie           | 0,2      | 1,9      | 6,2      | 13,2     | 22,2     | 32,2     | 42,6     | 52,4     | 61,2      | 69,2      |
| Podkarpackie       | 0,2      | 2        | 6,6      | 14,1     | 23,6     | 34,1     | 44,8     | 54,7     | 63,7      | 71,4      |
| Podlaskie          | 0,2      | 2        | 6,6      | 14       | 23,5     | 34       | 44,6     | 54,6     | 63,5      | 71,2      |

cd. tabeli 5

| <i>1</i>            | <i>2</i> | <i>3</i> | <i>4</i> | <i>5</i> | <i>6</i> | <i>7</i> | <i>8</i> | <i>9</i> | <i>10</i> | <i>11</i> |
|---------------------|----------|----------|----------|----------|----------|----------|----------|----------|-----------|-----------|
| Pomorskie           | 0,2      | 1,9      | 6,3      | 13,6     | 22,8     | 33,1     | 43,5     | 53,4     | 62,3      | 70,1      |
| Śląskie             | 0,2      | 1,7      | 5,9      | 12,7     | 21,3     | 31,2     | 41,3     | 51       | 59,9      | 67,7      |
| Świętokrzyskie      | 0,2      | 1,9      | 6,3      | 13,6     | 22,8     | 33,1     | 43,5     | 53,4     | 62,3      | 70,1      |
| Warmińsko-Mazurskie | 0,2      | 1,8      | 6,3      | 13,3     | 22,5     | 32,7     | 43,1     | 52,9     | 61,9      | 69,6      |
| Wielkopolskie       | 0,1      | 1,8      | 6,1      | 13       | 22       | 32,1     | 42,3     | 52,1     | 61        | 68,8      |
| Zachodniopomorskie  | 0,2      | 1,8      | 6,2      | 13,2     | 22,3     | 32,4     | 42,8     | 52,6     | 61,5      | 69,2      |
| POLSKA              | 0,2      | 1,9      | 6,3      | 13,4     | 22,6     | 32,8     | 43,2     | 53,0     | 62,0      | 69,7      |

Źródło: Opracowanie własne.

**Tabela 6.** Prawdopodobieństwa ruiny dla  $\mu = 5\%$   $\sigma = 10\%$  w grupie mężczyzn w wieku 60 lat

| Województwo         | 0,01 | 0,02 | 0,03 | 0,04 | 0,05 | 0,06 | 0,07 | 0,08 | 0,09 | 0,1  |
|---------------------|------|------|------|------|------|------|------|------|------|------|
| Dolnośląskie        | 0    | 0,4  | 1,7  | 4,2  | 8    | 13   | 19   | 25,6 | 32,7 | 39,8 |
| Kujawsko-Pomorskie  | 0    | 0,4  | 1,7  | 4,2  | 8    | 13   | 19   | 25,6 | 32,7 | 39,8 |
| Lubelskie           | 0    | 0,4  | 2,3  | 5,8  | 10,9 | 17,5 | 25,1 | 33,3 | 41,7 | 49,7 |
| Lubuskie            | 0    | 0,4  | 2,3  | 5,8  | 11   | 25,2 | 25,2 | 33,3 | 41,7 | 49,7 |
| Łódzkie             | 0    | 0,4  | 2,4  | 5,8  | 10,1 | 17,5 | 25,2 | 33,3 | 41,7 | 37,9 |
| Małopolskie         | 0    | 0,4  | 1,8  | 4,6  | 8,8  | 14,2 | 20,7 | 27,8 | 35,2 | 42,6 |
| Mazowieckie         | 0    | 0,4  | 1,9  | 4,5  | 8,7  | 14,1 | 20,4 | 27,4 | 34,8 | 42,2 |
| Opolskie            | 0    | 0,4  | 1,7  | 4,3  | 8,1  | 13,2 | 19,3 | 25,9 | 33   | 40,2 |
| Podkarpackie        | 0    | 0,5  | 2    | 4,8  | 9,1  | 14,7 | 21,4 | 28,7 | 36,3 | 43,8 |
| Podlaskie           | 0    | 0,4  | 1,8  | 4,4  | 8,4  | 13,6 | 19,6 | 26,7 | 33,9 | 41,2 |
| Pomorskie           | 0    | 0,4  | 1,8  | 4,5  | 8,5  | 13,8 | 20   | 27   | 34,2 | 41,5 |
| Śląskie             | 0    | 0,4  | 1,7  | 4,1  | 7,9  | 12,8 | 18,6 | 25,2 | 32,1 | 39,1 |
| Świętokrzyskie      | 0    | 0,4  | 1,7  | 4,3  | 8,2  | 13,3 | 19,5 | 26,2 | 33,3 | 40,5 |
| Warmińsko-Mazurskie | 0    | 0,4  | 1,6  | 4,1  | 7,7  | 12,6 | 18,4 | 24,9 | 31,2 | 38,8 |
| Wielkopolskie       | 0    | 0,4  | 1,7  | 4,3  | 8,3  | 13,3 | 19,4 | 26,2 | 33,3 | 40,6 |
| Zachodniopomorskie  | 0    | 0,4  | 1,7  | 4,2  | 8,1  | 13,1 | 19,1 | 25,8 | 32,9 | 40   |
| POLSKA              | 0,0  | 0,6  | 2,2  | 5,2  | 9,6  | 15,1 | 21,6 | 28,7 | 36,0 | 43,2 |

Źródło: Opracowanie własne.

**Tabela 7.** Prawdopodobieństwa ruiny dla  $\mu = 5\%$   $\sigma = 10\%$  w grupie kobiet w wieku 60 lat

| Województwo        | 0,01     | 0,02     | 0,03     | 0,04     | 0,05     | 0,06     | 0,07     | 0,08     | 0,09      | 0,1       |
|--------------------|----------|----------|----------|----------|----------|----------|----------|----------|-----------|-----------|
| <i>1</i>           | <i>2</i> | <i>3</i> | <i>4</i> | <i>5</i> | <i>6</i> | <i>7</i> | <i>8</i> | <i>9</i> | <i>10</i> | <i>11</i> |
| Dolnośląskie       | 0        | 0,4      | 1,7      | 4,2      | 8        | 13       | 19       | 25,6     | 32,7      | 39,8      |
| Kujawsko-Pomorskie | 0        | 0,6      | 2,3      | 5,7      | 10,9     | 17,5     | 25,1     | 33,3     | 41,7      | 49,7      |
| Lubelskie          | 0        | 0,6      | 2,3      | 5,7      | 10,9     | 17,5     | 25,1     | 33,3     | 41,7      | 49,7      |
| Lubuskie           | 0        | 0,6      | 2,3      | 5,8      | 10,9     | 17,5     | 25,1     | 33,1     | 41,7      | 49,7      |
| Łódzkie            | 0        | 0,5      | 2,3      | 5,6      | 10,7     | 17,1     | 24,6     | 32,7     | 40,9      | 48,9      |
| Małopolskie        | 0        | 0,6      | 2,5      | 6        | 11,5     | 18,4     | 26,3     | 32,8     | 43,3      | 51,5      |
| Mazowieckie        | 0        | 0,6      | 2,5      | 6        | 11,5     | 18,4     | 26,4     | 34,8     | 43,3      | 51,5      |
| Opolskie           | 0        | 0,6      | 2,3      | 5,8      | 11       | 17,7     | 25,3     | 33,6     | 41,9      | 50        |
| Podkarpackie       | 0        | 0,6      | 2,5      | 6,1      | 11,7     | 18,6     | 26,6     | 35,1     | 43,7      | 51,9      |
| Podlaskie          | 0        | 0,6      | 2,4      | 6,1      | 11,6     | 18,5     | 26,5     | 35,1     | 43,5      | 51,7      |
| Pomorskie          | 0        | 0,6      | 2,4      | 5,9      | 11,3     | 18       | 25,9     | 34,3     | 42,7      | 50,8      |

cd. tabeli 7

| 1                   | 2 | 3   | 4   | 5   | 6    | 7    | 8    | 9    | 10   | 11   |
|---------------------|---|-----|-----|-----|------|------|------|------|------|------|
| Śląskie             | 0 | 0,6 | 2,3 | 5,6 | 10,7 | 17,1 | 24,6 | 32,7 | 40,9 | 48   |
| Świętokrzyskie      | 0 | 0,6 | 2,4 | 5,9 | 11,3 | 18   | 25,9 | 34,3 | 42,7 | 50,2 |
| Warmińsko-Mazurskie | 0 | 0,6 | 2,4 | 5,9 | 11,1 | 17,8 | 25,7 | 33,9 | 42,3 | 50,3 |
| Wielkopolskie       | 0 | 0,5 | 2,3 | 5,7 | 10,9 | 17,6 | 25,2 | 33,4 | 41,2 | 49,8 |
| Zachodniopomorskie  | 0 | 0,6 | 2,3 | 5,9 | 11,1 | 17,7 | 25,5 | 33,7 | 42,1 | 50,1 |
| POLSKA              | 0 | 0,5 | 2,2 | 6,3 | 11,4 | 17,9 | 25,2 | 33,9 | 41,4 | 50,4 |

Źródło: Opracowanie własne.

## Podsumowanie

W pracy przedstawiliśmy możliwość wykorzystania wartości zagrożonej do oszacowania prawdopodobieństw ruiny dla kobiet i mężczyzn na podstawie rzeczywistych tablic trwania życia z 2013 r. Na podstawie wyników stwierdzamy, że prawdopodobieństwa ruiny dla kobiet są wyższe niż dla mężczyzn w tym samym wieku. Można oczekiwać, że prawdopodobieństwo ruiny zmniejsza się wraz ze wzrastającym wiekiem przejścia na emeryturę i zmniejszającym się wskaźnikiem wydatkowania. Ponadto prawdopodobieństwa ruiny zmniejszają się wraz ze zwiększającym się dryfem inwestycji i zmniejszającą się zmiennością inwestycji.

## Literatura

- Bartkowiak M. (2011), *Transfer ryzyka długowieczności*, „Polityka Społeczna”, 2011, numer specjalny: *Problemy zabezpieczenia emerytalnego w Polsce i na świecie*, cz. II, s. 22-24.
- Blake D., Boardman T., Cairns A. (2010), *The Case of Longevity Bonds*, Center for Retirement Research at Boston College, nr 10 (10), s. 1-6.
- Cipra T. (2010), *Financial and Insurance Formulas*, Heidelberg, Dordrecht, London, New York: Physica-Verlag, Springer.
- Dufresne D. (1990), *The distribution of a perpetuity with applications to risk theory and pension funding*, „Scandinavian Actuarial Journal”, 9, s. 39-79.
- GUS, *Trwanie życia w 2013 r.*, [www.statgov.pl](http://www.statgov.pl).
- GUS, *Prognoza ludności do 2050 r.*, [www.statgov.pl](http://www.statgov.pl).
- Malliari A.G., Brock W.A. (1982), *Stochastic Methods in Economics and Finance*, Amsterdam: North-Holland.
- Milevsky M.A. (1997), *The present value of a stochastic perpetuity and the Gamma distribution*, Insurance: Mathematics and Economics, 20, s. 243-250.
- Milevsky M.A. (2006), *The Calculus of Retirement Income*, Cambridge University Press.

Milevsky M. (2006), *The Calculus of Retirement Income: Financial Models for Pension Annuities and Life Insurance*, New York: Cambridge University Press.

*OECD Pension Outlook* (2014), OECD Publishing.

Pitacco E., Denuit M., Haberman S., Olivieri A. (2009), *Modelling Longevity Dynamics for Pensions and Annuity Business*, Oxford University Press.

Trzpiot G., Majewska J. (2015), *Modeling longevity risk*, University of Economics in Katowice, (w druku).

### MODELING OF LONGEVITY RISK IN A REGIONAL CONTEXT

**Summary:** The study addresses the issue of specific longevity risk, which consists in the fact that a person will live longer age than expected, resulting in total or partial exhaustion of material resources that gathered in old age (i.e. the bankruptcy retirement). We use the concept we known of modern finance – value at risk – to estimate the probabilities of bankruptcies pension for all Polish voivodships. For this purpose we use life tables from 2013.

**Keywords:** longevity risk, table life expectancy, probability of ruin, geometric Brown motion.



### Grażyna Trzpiot

Uniwersytet Ekonomiczny w Katowicach  
Wydział Informatyki i Komunikacji  
Katedra Demografii i Statystyki Ekonomicznej  
grazyna.trzpiot@ue.katowice.pl

### Jacek Szoltysek

Uniwersytet Ekonomiczny w Katowicach  
Wydział Zarządzania  
Katedra Logistyki Społecznej  
jacek.szoltysek@ue.katowice.pl

## ANALIZA PREFERENCJI JAKOŚCI ŻYCIA SENIORÓW W MIASTACH

**Streszczenie:** Zmiany demograficzne zachodzące w społeczeństwie stanowią o nowych obszarach badawczych. W szczególności badaniami objęto upodobania ludzi starszych. Celem artykułu jest analiza preferencji, do której wykorzystamy wielowymiarową analizę statystyczną w ocenie jakości życia w miastach przez starszych mieszkańców. Analiza zostanie przeprowadzona na podstawie danych uzyskanych z badania ankietowego przeprowadzonego wśród starszych ludzi zamieszkujących województwo śląskie. Ankietę stanowiło kilka bloków pytań, odpowiedzi respondenci udzielali na skali porządkowej.

**Słowa kluczowe:** wielowymiarowa analiza preferencji, miasto, jakość życia.

### Wprowadzenie

Rozważania objęte tym artykułem koncentrują się na dwóch pojęciach kluczowych – jakości życia i mieście. Oba stanowią kanwę dla odpowiedzi na pytanie, jak kształtują się preferencje jakości życia seniorów. Pojawiająca się tu trzecia kategoria – „seniora” – jest równie trudna do określenia według kryteriów czysto osobistych, natomiast łatwa do zapożyczenia z literatury specjalistycznej. Szczególnie trudno uzyskać definicję seniora u źródła – czyli osób starszych, zwyczajowo kwalifikowanych do grupy senioralnej. Badani seniorzy sami siebie określają rozmaicie, często unikając klasyfikacji wiekowej, chętniej przyznając się do roli emeryta, babci (dziadka), osoby dojrzałej.<sup>1</sup> W aspektach badawczych

<sup>1</sup> Przykładem takiej definicji niech będzie: „definicję pojęcia „senior” członkowie Klubu pozo- stawiają w sferze własnej interpretacji uważając, iż ten zaszczytny tytuł wskazuje nie tyle na wiek, co przede wszystkim na bogaty багаż doświadczeń życiowych, styl życia i sposób spę-

„senior” to kategoria związana ze starością. Starość to proces rozłożony w czasie. Światowa Organizacja Zdrowia (WHO, *World Health Organization*) dzieli starość na trzy podokresy: wiek podeszły (60-75), wiek starczy (75-90 lat), wiek sędziwy – długowieczność (powyżej 90. roku życia). D.B. Bromley wyróżnił cztery okresy: przedemerytalny (60-65 lat), emerytalny (65-70 lat), starczy (70-90 lat), sędziwy (powyżej 90 lat) [Bromley, 1969]. W naszych badaniach senior to osoba, która przekroczyła 65. rok życia. „Jakość życia” – kategoria kluczowa w tych badaniach, również podlega zdefiniowaniu. Tego zabiegu nie ułatwia, a paradoksalnie utrudnia, mnogość definicji jakości życia, będąca skutkiem przynależności ich autorów do rozmaitych dyscyplin naukowych, nie sprzyja to jednolitości poglądów. Po raz pierwszy w sensie naukowym pojęcie jakości życia zostało użyte przez Arystotelesa w jego rozważaniach nad naturą materii. Zwracał on uwagę na dążenie człowieka do uzyskiwania przyjemności, satysfakcji z dokonywanych wyborów i dobrego samopoczucia w ciągu całego życia. W koncepcjach filozoficznych jakość życia była utożsamiana z dobrostanem określanym jako różnica między sumą wszystkich przyjemności a sumą wszystkich cierpień, jakich człowiek doświadcza w ciągu życia. Takie pojmowanie jakości życia jest intuicyjnie potwierdzane w rozmowach, jakie autorzy przeprowadzili w ramach swoich badań w tym obszarze z seniorami. Według definicji Światowej Organizacji Zdrowia, jakość życia to „indywidualny sposób postrzegania przez jednostkę jej pozycji życiowej w kontekście kulturowym i systemu wartości, w którym żyje, oraz w odniesieniu do zadań, oczekiwań i standardów wyznaczonych warunkowaniami środowiskowymi” [WHOQL Group, 1991]. Dla rozważań niniejszego artykułu następujące określenie jest wystarczająco pojemne: jakość życia to zaspokojenie wymagań, potrzeb określających poziom duchowego i materialnego bytu jednostek i całego społeczeństwa [Kolman, 2000]. Jakość życia określają zarówno czynniki obiektywne, np. przeciętne trwanie życia, zasięg ubóstwa, poziom skolaryzacji, jak i subiektywne, np. poziom szczęścia, stres czy sens życia. Miasta zaś – jako kolejna kategoria kluczowa – są miejscem doświadczeń indywidualnych i grupowych (zbiorowych), usytuowanych w kontekście przestrzennym i kulturowo-historycznym. Na miasto można spojrzeć jako na zjawisko społeczno-przestrzenne, harmonizujące w przestrzeni fizycznej stosunki społeczne. Społeczność obejmuje we władanie przestrzeń, zagospodarowuje ją oraz ustala stosunki między mieszkańcami, by ci mogli realizować swoje dążenia do godnego życia w zgodzie ze środowiskiem naturalnym. Pojęcie god-

---

dzenia czasu wolnego, charakterystyczny dla pewnego etapu życia człowieka” [Regulamin Klubu Seniora Miejskiego Ośrodka Pomocy Rodzinie].

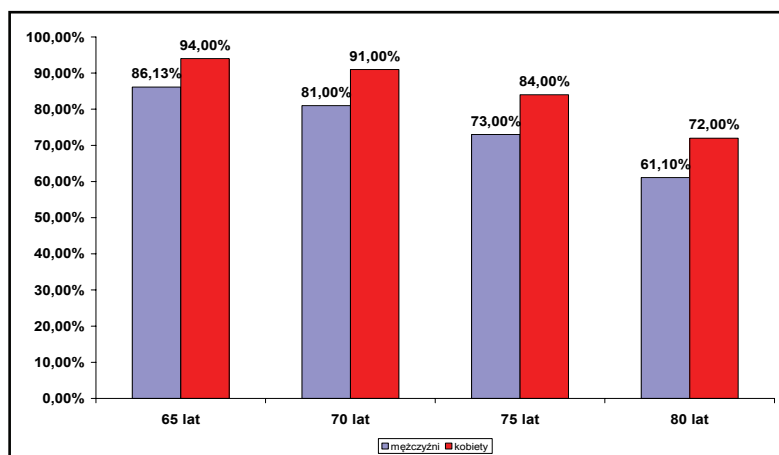
nego życia bywa różne, zazwyczaj obejmuje zarówno warunki fizyczne (sprawność, zdrowie), psychiczne (radzenie sobie z codziennymi trudnościami), jak i społeczne (pozytywne relacje z ludźmi). Ambicją każdego miasta powinno być stwarzanie warunków do godnego życia swoich mieszkańców. Jest to cel uniwersalny, który powinien być realizowany w każdej wielkości mieście, niezależnie od posiadanych zasobów, na miarę własnych możliwości [Szołtysek, 2015]. Zatem dla każdego mieszkańca, jakość życia może zostać „wmontowana” w strukturę tego, co się w mieście dzieje.

Badając poczucie jakości życia w mieście, trudno nie zauważyć kwestii zarządzania miastem oraz wpływu respondentów na to, kto i w jaki sposób miastem włada [Szołtysek, 2014]. Dotychczas przeprowadzane badania traktują jakość życia jako zjawisko współwarunkowane szeregiem czynników wykazujących duże zróżnicowanie oraz zmienność [Szołtysek, Otręba, 2015]. Rozwój miast jest procesem ciągłym, co oznacza, że nie istnieje „stan docelowy”, do którego by ono dążyło. Każdy osiągnięty stan jest stanem przejściowym, stanowiącym podstawę następnego etapu rozwoju [Bury, Markowski, Regulski, 1993]. Tak rozumiany rozwój pozwala na osiąganie lepszych warunków funkcjonowania poprzez dokonywanie pozytywnych zmian [Szołtysek, 2009] oraz wykorzystywania szans rozwojowych. Szanse rozwojowe miast są bezpośrednio powiązane z satysfakcją, jakiej dostarczają one ich użytkownikom poprzez działalność społeczno-gospodarczą wykonywaną na rzecz jego użytkowników oraz otoczenia, niezależnie od jej rangi ekonomicznej i przestrzennej. Poza tym miasta mogą pełnić funkcje: polityczno-administracyjne, militarno-obronne, usługowe, produkcyjne i inne [Szołtysek, 2009]. Sprawność miast w realizowaniu jego funkcji, powiązana ze sprawnością pokonywania barier rozwojowych i przestrzeni, jest jednym z wymiarów waloryzacji zarówno samych miast, jak i jakości życia mieszkańców.

## 1. Zjawisko starzenia się społeczeństwa w miastach

Obserwowane zmiany demograficzne obejmują w Polsce dwa istotne trendy. Zmiany w poziomie urodzeń oraz zmiany w poziomie śmiertelności. Wskazując na zmiany poziomu śmiertelności w Polsce, możemy stwierdzić, że korzyści wynikające z rozwoju nowych technologii medycznych i nowoczesnych metod diagnostycznych oraz poprawa kondycji zdrowotnej Polaków realizowana przez prozdrowotny styl życia, mają swoje odzwierciedlenie w trwającym już od 20 lat spadku natężenia zgonów, a tym samym wydłużaniu przeciętnego trwania życia.

W 2011 r. w Polsce mężczyźni żyli przeciętnie 72,4 lat, natomiast kobiety 80,9 lat. W stosunku do 1990 r. mężczyźni żyją dłużej o 6,2 lat, natomiast kobiety o 5,7.



**Rys. 1.** Prawdopodobieństwo dalszego trwania życia, tablice trwania życia z 2011 r.

Źródło: Opracowanie własne na podstawie [www.stat.gov.pl](http://www.stat.gov.pl).

Przeprowadzono ocenę zmian w procesie starzenia się społeczeństwa w określonym przedziale czasu, wykorzystano zaproponowany przez Długosza wskaźnik starzenia się demograficznego ( $W_{sd}$ )<sup>2</sup>:

$$W_{sd} = [U_{(0-14)t} - U_{(0-14)t+n}] + [U_{(>65)t+n} - U_{(>65)t}] \quad (1)$$

gdzie:

$U_{(0-14)t}$  – udział ludności w wieku 0-14 lat na początku badanego okresu,

$U_{(0-14)t+n}$  – udział ludności w wieku 0-14 lat na koniec badanego okresu,

$U_{(>65)t}$  – udział ludności w wieku 65 lat i więcej na początku badanego okresu,

$U_{(>65)t+n}$  – udział ludności w wieku 65 lat i więcej na koniec badanego okresu.

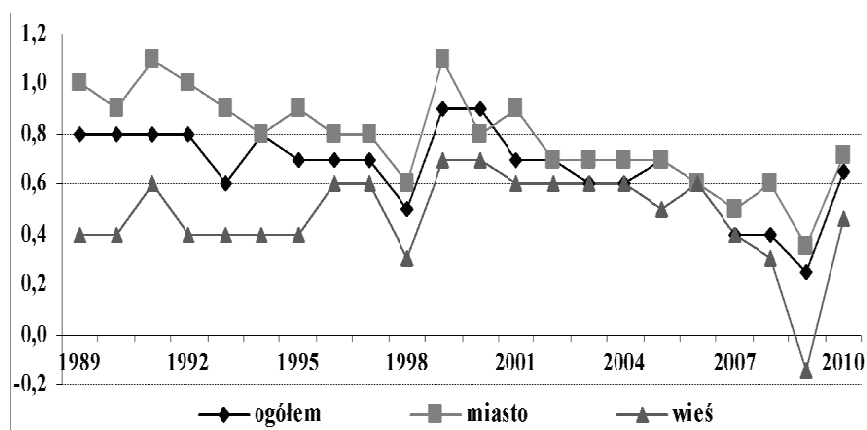
Interpretacja tego wskaźnika przebiega następująco: im wartości wskaźnika  $W_{sd}$  będą niższe od 0, tym w większym stopniu będziemy mieli do czynienia z odmładzaniem się społeczeństwa, natomiast im wskaźnik ten będzie wyższy od 0, tym starzenie się ludności będzie dynamiczniejsze.

Celem zbadania trendów w ostatnim 25-leciu, kiedy zachodziły dość znaczące zmiany w procesie starzenia się ludności Polski, podjęto próbę wykorzy-

<sup>2</sup> Z. Długosz: op. cit., s. 19.



stania wskaźnika starzenia się demograficznego ( $W_{sd}$ ). Posługując się rocznymi zmianami tego wskaźnika, w przekroju lat 1989-2011, obliczono dla miast i wsi wskaźnik starzenia (odmładzania) się ludności Polski ogółem (rys. 2).



**Rys. 2.** Roczne zmiany wskaźnika starzenia się demograficznego ludności Polski w punktach procentowych

Źródło: Trzpiot, Ojrzyńska [2014].

Cykliczność wielkości wskaźników  $W_{sd}$  w miastach i na terenach wiejskich jest zgodna z tym, że wielkość wskaźnika w całym okresie badania dla miast była wyższa niż na terenach wiejskich. Przyjmując rok 1989 jako początek okresu badania, a rok 2011 jako koniec, można zauważyć, że proces starzenia się ludności był znacznie dynamiczniejszy w miastach niż na wsi (tabela 1).

**Tabela 1.** Wskaźnik starzenia się demograficznego ludności Polski w latach 1989-2011 (w punktach procentowych)

| Wskaźnik starzenia się demograficznego |       |
|----------------------------------------|-------|
| Miasto                                 | Wieś  |
| 17,16                                  | 10,42 |

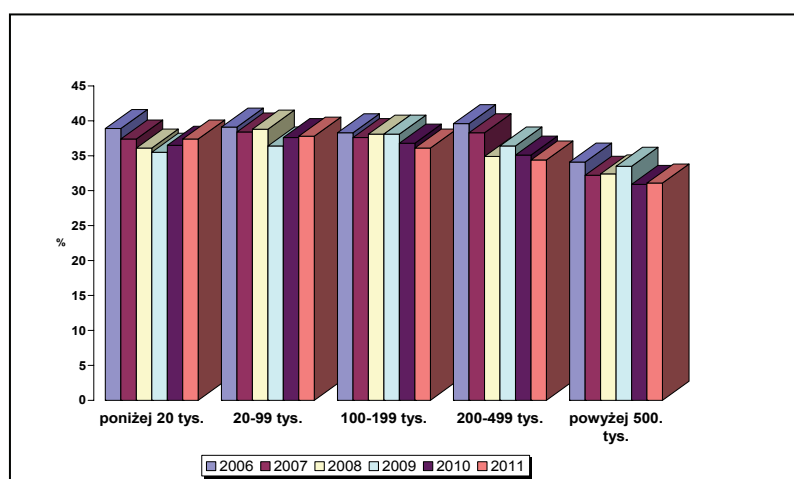
Źródło: Trzpiot, Ojrzyńska [2014].

Prognozy publikowane przez GUS wskazują na przebiegające równolegle w czasie dwa zjawiska. Prognozowana jest malejąca liczba ludności w miastach (tabela 2), a równocześnie jedyna grupa wiekowa, której prognozowana liczebność w miastach będzie rosła, dotyczy osób w wieku powyżej 65 lat. Podnosi się równocześnie udział gospodarstw domowych emerytów i rencistów w miastach (rys. 3).

**Tabela 2.** Prognozowane zmiany w strukturze wieku ludności miejskiej w latach 2015-2035 (w tys.)

| Wiek     | 2015 | 2020   | 2025 | 2030 | 2035 |
|----------|------|--------|------|------|------|
| 0-17     | -42  | 71     | -77  | -320 | -344 |
| 18-59/64 | -929 | -961   | -579 | -232 | -333 |
| 18-44    | -315 | -660   | -830 | -753 | -444 |
| 45-59/64 | -613 | -301   | 251  | 521  | 111  |
| 60+/65+  | 723  | 642    | 306  | 52   | 92   |
| 0-14     | 87   | 89     | -169 | -324 | -287 |
| 15-64    | -937 | -1 053 | -707 | -282 | -276 |
| 65+      | 601  | 716    | 526  | 106  | -21  |
| 75+      | 139  | 28     | 431  | 516  | 328  |
| 80+      | 133  | 80     | 12   | 339  | 380  |
| 85+      | 96   | 67     | 42   | 9    | 229  |

Źródło: Prognoza GUS.

**Rys. 3.** Udział gospodarstw domowych emerytów i rencistów w miastach według liczby mieszkańców w latach 2006-2011

Źródło: Opracowanie własne na podstawie GUS: Badanie budżetów gospodarstw domowych dla lat 2000-2011.

## 2. Seniorzy w polskich miastach

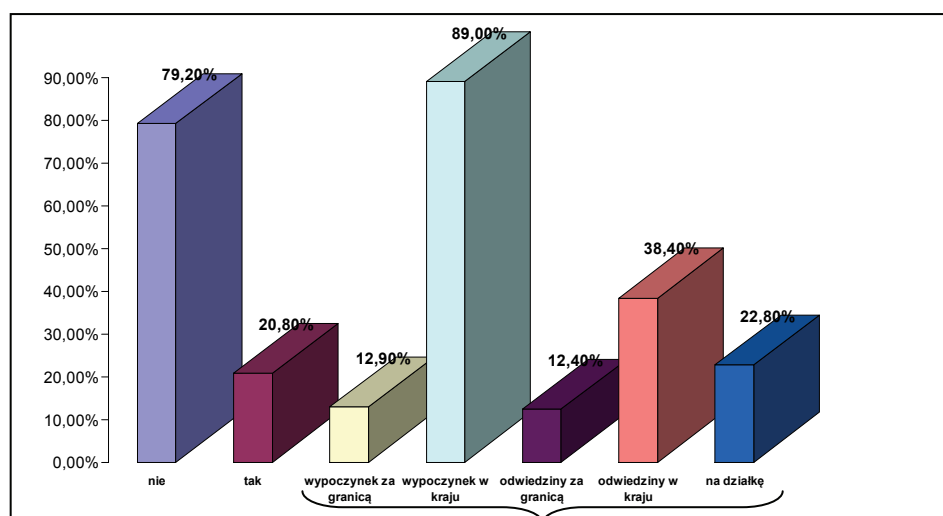
Do swobodnego przemieszczania się niezbędne są zarówno możliwości pokonywania przestrzeni (samodzielnie bądź z wykorzystaniem środków ułatwiających przemieszczanie) oraz możliwość aktywnej wymiany informacji (za pośrednictwem zmysłu wzroku, słuchu i głosu). Natura problemu mobilności ma wysoce interdyscyplinarny charakter. Badania prowadzone w ramach projektu SIZE wykazały, że struktura codziennej mobilności seniorów jest podobna w całej

Europie. Mobilność seniorów obejmuje wykonywanie codziennych czynności (zakupy, dbanie o zdrowie, płacenie rachunków), poruszanie się pieszo (spacery z dziećmi, z psem itp.), rozrywki (umysłowe: kino, teatr, TV, czytanie książek, słuchanie radia, gry w karty oraz fizyczne: gimnastyka, wycieczki, prace w ogrodzie)<sup>3</sup>. Seniorzy chcą być potrzebni, jednak niekiedy na przeszkodzie w tej sferze emocjonalnej stają przeszkody natury fizycznej, zarówno leżące po stronie samych seniorów, jak i otoczenia.

**Tabela 3.** Przemieszczenia fakultatywne – czas wolny osób starszych (65+)

|                     | Co najmniej raz w miesiącu | Rzadziej niż raz w miesiącu | Prawie nigdy |
|---------------------|----------------------------|-----------------------------|--------------|
| Wyjście do kina     | 1,6                        | 9,3                         | 89,1         |
| Wyjście do teatru   | 1,2                        | 11,4                        | 87,4         |
| Zwiedzanie wystaw   | 1,1                        | 10,3                        | 88,6         |
| Wyjście do czytelní | 6,6                        | 4,6                         | 88,8         |
| Wyjście na mecze    | 1,2                        | 5,6                         | 93,2         |
| Wyjście na dansingi | 1                          | 1,8                         | 97,2         |
| Odwiedziny bliskich | 46,2                       | 35,5                        | 18,3         |
| Wyjście do kawiarni | 8,3                        | 10,3                        | 81,4         |
| Uprawianie sportu   | 9,1                        | 3,2                         | 87,7         |
| Spacery             | 67,5                       | 10,1                        | 22,4         |

Źródło: Opracowanie własne na podstawie badań GUS.



**Rys. 4.** Wyjazdy osób starszych (65+) na dłużej niż 5 dni

Źródło: Opracowanie własne na podstawie GUS: Badanie budżetów gospodarstw domowych dla lat 2000-2011.

<sup>3</sup> Results of focus-group interviews and in-depth interviews with senior citizens and experts, deliverables D5 and D6, SIZE, Cracow University of Technology, s.17 ([www.size-project.at/results/SIZE\\_D5-6\\_complete.pdf](http://www.size-project.at/results/SIZE_D5-6_complete.pdf); dostęp: 02.05.2013).

Na kształt mobilności polskich seniorów w miastach mają również wpływ czynniki kulturowe i nawykowe, wykształcone w trakcie całego życia. Na taki obraz chęci do przemieszczania się, szczególnie w aspektach niewymagających codziennego, rutynowego pokonywania przestrzeni, ma wpływ (poza zdrowotnym) sytuacja materialna, dostępność asysty oraz intensywność kontaktów międzyludzkich, będąca często pochodną stylu życia (w szczególności aktywności osobowej) oraz wykształcenia i kręgu zainteresowań. Wymienione elementy stanowią bodźce bądź ograniczenia mobilności, leżące po stronie samych seniorów [Szoltysek, Trzpiot, 2015].

#### 4. Jakość życia w miastach w ocenie ludzi starszych

Jakość życia oceniano, kierując się cechami przypisanymi do wybranych kategorii, takich jak warunki bytowe, podstawy, edukacja, kultura i kultura fizyczna, zdrowie, mobilność, sąsiedztwo, bezpieczeństwo, akceptacja, darmowe usługi, przestrzeń publiczna.

**Tabela 4.** Zmienne oceniające jakość życia w mieście<sup>4</sup>

| Problemy szczegółowe |                          | Wskaźniki |                                                                                                                       |
|----------------------|--------------------------|-----------|-----------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|
| 1                    | 2                        | 3         | 4                                                                                                                     |
| P1                   | Warunki bytowe           | W1        | Czystość środowiska naturalnego                                                                                       |
|                      |                          | W2        | Dostępność do sklepów (łatwość w dojściu/dojechaniu)                                                                  |
|                      |                          | W3        | Estetyka budynków, ulic, parków                                                                                       |
|                      |                          | W4        | Koszty zamieszkania/utrzymania                                                                                        |
|                      |                          | W5        | Możliwości i warunki wygodnego robienia zakupów                                                                       |
|                      |                          | W6        | Możliwości skorzystania z potrzebnych usług (szewc, fryzjer, itp.)                                                    |
|                      |                          | W7        | Organizacja gospodarki odpadami z gospodarstw domowych                                                                |
|                      |                          | W8        | Przyroda (tereny zielone) w otoczeniu                                                                                 |
|                      |                          | W9        | Uciążliwość hałasu                                                                                                    |
|                      |                          | W10       | Warunki zamieszkania (własność mieszkania, standard)                                                                  |
| P2                   | Podstawy materialne bytu | W11       | Dostępność miejsc pracy (możliwość zatrudnienia)                                                                      |
|                      |                          | W12       | Istnienie doradztwa i pośrednictwa w pozyskiwaniu pracy                                                               |
|                      |                          | W13       | Łatwość zmiany pracy                                                                                                  |
|                      |                          | W14       | Możliwość założenia własnego biznesu                                                                                  |
|                      |                          | W15       | Perspektywy rozwoju kariery zawodowej                                                                                 |
|                      |                          | W16       | Wsparcie udzielane przedsiębiorcom przez miasto                                                                       |
| P3                   | Edukacja                 | W17       | Możliwość, jakość oraz warunki kształcenia dzieci (żłobki, przedszkola)                                               |
|                      |                          | W18       | Możliwość, jakość oraz warunki kształcenia dzieci i młodzieży (szkoły podstawowe, gimnazjum, szkoły ponadgimnazjalne) |
|                      |                          | W19       | Możliwość, jakość oraz warunki kształcenia dorosłych (uczelnie wyższe, studia podyplomowe)                            |

<sup>4</sup> <http://www.ue.katowice.pl/jednostki/katedry/wydzial-zarzadzania/katedra-logistyki-spolecznej/ankieta.html>.

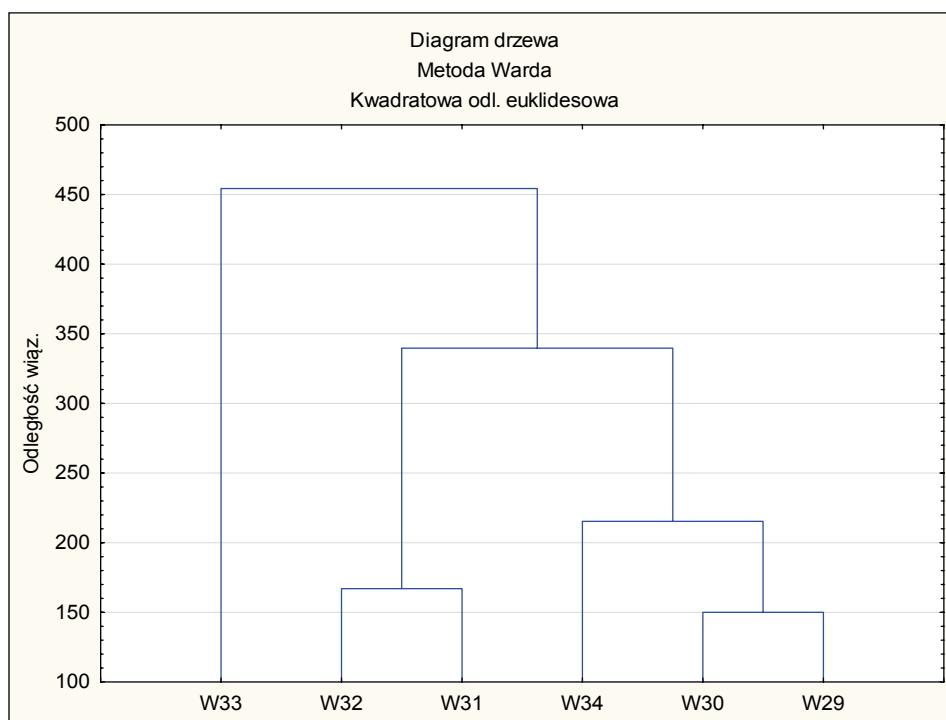
cd. tabeli 4

| 1   | 2                         | 3   | 4                                                                                                 |
|-----|---------------------------|-----|---------------------------------------------------------------------------------------------------|
| P4  | Kultura, kultura fizyczna | W20 | Dostępność do bibliotek publicznych                                                               |
|     |                           | W21 | Dostępność do punktów gastronomicznych (pub, restauracja)                                         |
|     |                           | W23 | Dostępność do punktów kultury (kino, teatr)                                                       |
|     |                           | W24 | Dostępność do punktów kultury fizycznej (siłownia)                                                |
|     |                           | W25 | Możliwość czynnego uprawiania sportu                                                              |
|     |                           | W26 | Możliwość i warunki atrakcyjnego spędzania czasu wolnego                                          |
|     |                           | W27 | Organizacja przestrzeni spotkań z przyjaciółmi                                                    |
| P5  | Zdrowie                   | W28 | Organizacja miasteczek wydarzeń (koncert, noc muzeum, itp.)                                       |
|     |                           | W29 | Dostępność do jednostek ochrony zdrowia                                                           |
|     |                           | W30 | Jakość świadczonych usług medycznych                                                              |
|     |                           | W31 | Kolejki oczekujących na wizytę                                                                    |
|     |                           | W32 | Koszty leczenia (prywatne praktyki lekarskie)                                                     |
|     |                           | W33 | Patologie społeczne (alkoholizm, narkomania, przemoc itp.)                                        |
| P6  | Mobilność                 | W34 | Poziom służby zdrowia (specjalizacja regionu)                                                     |
|     |                           | W35 | Bezpieczeństwo osobiste w podróży (np. kradzieże w środkach transportu)                           |
|     |                           | W36 | Bezpieczeństwo ruchu pojazdu komunikacji zbiorowej (prawdopodobieństwo zdarzenia komunikacyjnego) |
|     |                           | W37 | Cena biletu komunikacji publicznej                                                                |
|     |                           | W38 | Dostępność do transportu zbiorowego                                                               |
|     |                           | W39 | Dostępność do parkingów (łatwość zaparkowania)                                                    |
|     |                           | W40 | Dostępność do tras rowerowych                                                                     |
|     |                           | W41 | Jakość transportu zbiorowego                                                                      |
|     |                           | W42 | Możliwość podróżowania innymi środkami transportu                                                 |
|     |                           | W43 | Przepustowość głównych tras komunikacyjnych (korki)                                               |
|     |                           | W44 | Warunki oczekiwania na przystankach (zadaszenie, siedzenia, osłonięcie od wiatru itp.)            |
|     |                           | W45 | Warunki podróżowania (miejsca stojące, siedzące, tłok, czystość, temperatura)                     |
| P7  | Sąsiedztwo                | W46 | Wydzielone pasy ruchu (dla komunikacji zbiorowej)                                                 |
|     |                           | W47 | Zniżki w opłatach za przejazd środkami komunikacji zbiorowej                                      |
|     |                           | W48 | To, kto jest Twoim sąsiadem (narodowość)                                                          |
|     |                           | W49 | To, czy Twoi sąsiedzi są ubodzy                                                                   |
|     |                           | W50 | To, czy Twoi sąsiedzi mają podejrzaną dochody                                                     |
|     |                           | W51 | To, że Twoi sąsiedzi są hałaśliwi                                                                 |
|     |                           | W52 | To, że Twoi sąsiedzi są odmiennego wyznania (religii)                                             |
|     |                           | W53 | To, że Twoi sąsiedzi są innej orientacji seksualnej                                               |
| P8  | Bezpieczeństwo            | W54 | Lokalizacja Twojego miejsca zamieszkania                                                          |
|     |                           | W55 | Bezpieczeństwo na drogach, przejścia dla pieszych                                                 |
|     |                           | W56 | Bezpieczeństwo otoczenia (ulica, przystanek, dzielnica)                                           |
|     |                           | W57 | Bezpieczeństwo w godzinach nocnych (22.00-06.00)                                                  |
|     |                           | W58 | Bezpieczeństwo w miejscach publicznych                                                            |
|     |                           | W59 | Czy należy zwiększać ilość osiedli strzeżonych                                                    |
|     |                           | W60 | Gotowość służb na sytuacje kryzysowe (wypadek, powódź, pożar, napad, itp.)                        |
| P9  | Akceptacja                | W61 | Zamieszkanie w osiedlu zamkniętym / strzeżonym                                                    |
|     |                           | W62 | Akceptowanie / tolerowanie mniejszości narodowych i etnicznych                                    |
|     |                           | W63 | Akceptowanie/tolerowanie mniejszości seksualnych                                                  |
|     |                           | W64 | Wsparcie dla osób wymagających pomocy (bezdomność)                                                |
|     |                           | W65 | Wsparcie dla osób wymagających pomocy osoby starsze)                                              |
| P10 | Darmowe usługi            | W66 | Wsparcie dla osób wymagających pomocy (osoby niepełnosprawne)                                     |
|     |                           | W67 | Bezpłatny Internet w przestrzeni miasta                                                           |
|     |                           | W68 | Organizacja akcji społecznych (np. uwolnij książkę)                                               |
|     |                           | W69 | Organizacja bezpłatnych eventów                                                                   |
|     |                           | W70 | Organizacja dnia bez samochodu                                                                    |

cd. tabeli 4

| 1   | 2                    | 3   | 4                                                                                                                     |
|-----|----------------------|-----|-----------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|
| P11 | Przestrzeń publiczna | W71 | Istnienie części miasta, w których człowiek ma możliwość nieograniczonego spotkania się z innymi (np. główny rynek)   |
|     |                      | W72 | Czy tego typu przestrzeni (ogólnodostępnych) jest w mieście wystarczającej ilości dla odczucia wysokiej jakości życia |
|     |                      | W73 | Czy Twoim zdaniem należy zwiększyć ilość przestrzeni ogólnodostępnej                                                  |
|     |                      | W74 | Łatwość dotarcia do przestrzeni publicznej pieszo, rowerem i                                                          |
|     |                      | W75 | Łatwość dotarcia do przestrzeni publicznej transportem indywidualnym oceniam na:                                      |
|     |                      | W76 | Łatwość dotarcia do przestrzeni publicznej transportem zbiorowym                                                      |

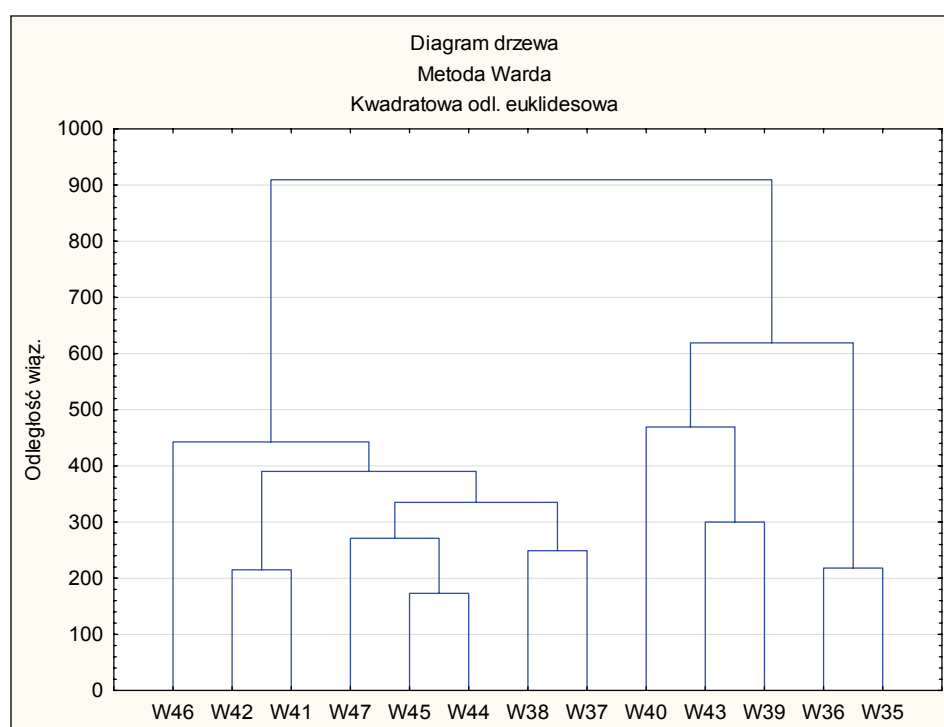
Respondenci oceniali każdą ze zmiennych w skali 1-5, gdzie 1 oznaczało, że zmienna nie ma wpływu, natomiast 5, że zmienna ma decydujące znaczenie dla jakości życia w mieście. Ze względu na docelową grupę respondentów, na potrzeby tej pracy ograniczono analizę do takich czynników jak zdrowie, mobilność, sąsiedztwo, bezpieczeństwo, akceptacja i przestrzeń publiczna. Badawcza grupa liczyła 208 osób, byli to mieszkańcy aglomeracji śląskiej. Wyniki poddano analizie skupień wykorzystywanej we wcześniejszych pracach [Szoltysek, Trzpiot, 2012] do badania preferencji.



Rys. 5. Dendrogram dla grupy zmiennych P5 – Zdrowie (W29-W34)

Źródło: Opracowanie własne.

Wskazując na preferencje w grupie zmiennych zdrowie (P5) w ocenie jakości życia w mieście wśród osób 65+, najważniejsze zmienne tworzące pierwsze skupienie (najmniejsze rozproszenie odpowiedzi, czyli największa zgodność w ocenach) tworzą dwie zmienne: *W29* – dostępność do jednostek ochrony zdrowia oraz *W30* – jakość świadczonych usług medycznych (rys. 5). Z tym skupieniem związana jest również zmienna *W34* – poziom służby zdrowia (specjalizacja regionu). Skupienie drugie, zatem rangi ocen bardziej rozproszone tworzą zmienne kolejki oczekujących na wizytę (*W31*) oraz koszty leczenia, prywatne praktyki lekarskie (*W32*). Osobne skupienie tworzy zmienna *W33* – patologie społeczne (alkoholizm, narkomania, przemoc itp.) największy rozrzut w ocenach tej zmiennej.



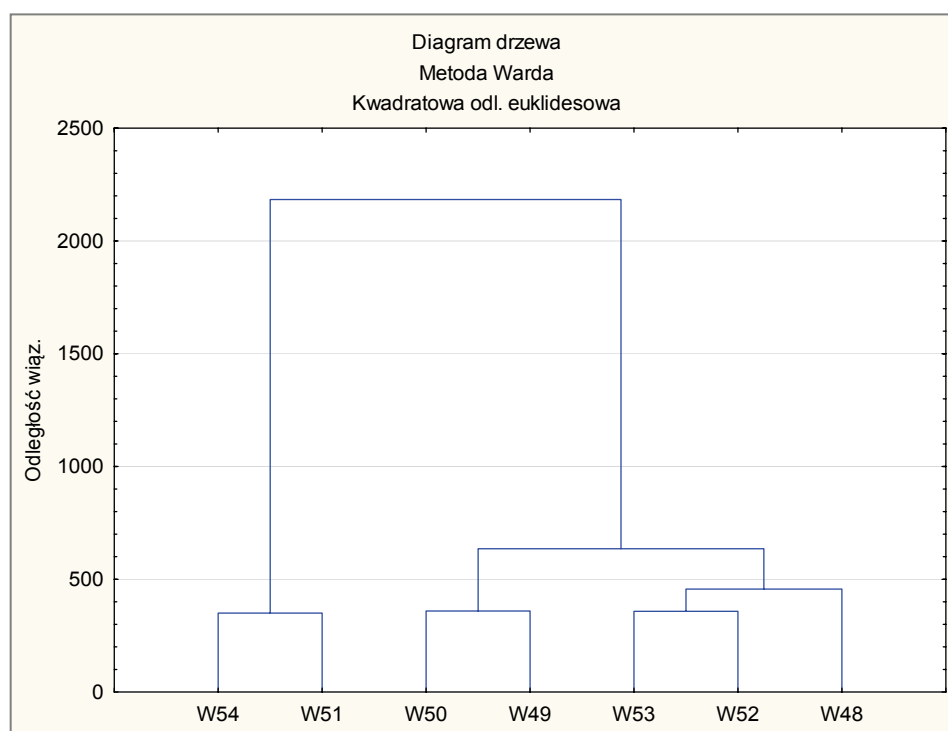
**Rys. 6.** Dendrogram dla grupy zmiennych P6 – Mobilność (W35-W47)

Źródło: Opracowanie własne.

Grupa zmiennych P6 jest bardzo liczna: mamy 13 zmiennych opisujących mobilność (*W35-W47*). Dendrogram (rys. 6) pokazuje dwa skupienia. W pierwszym skupieniu (na dendrogramie po lewej) są zmienne o najbardziej zbliżonych ocenach: *W44* – warunki oczekiwania na przystankach (zadaszenie, siedzenia,

osłonięcie od wiatru itp.) oraz *W45* – warunki podróżowania (miejsca stojące, siedzące, tłok, czystość, temperatura). Analogicznie podobne oceny mają zmienne: *W41* – jakość transportu zbiorowego oraz *W42* – możliwość podróżowania innymi środkami transportu. W tym samym skupieniu znalazły się w dalszej kolejności zmienne: *W37* – cena biletu komunikacji publicznej oraz *W38* – dostępność do transportu zbiorowego, dodatkowo łączą się w ocenach zmienne o większym rozproszeniu ocen: *W47* – zniżki w opłatach za przejazd środkami komunikacji zbiorowej oraz *W46* – wydzielone pasy ruchu (dla komunikacji zbiorowej).

Drugie skupienie tworzą pozostałe zmienne. Najbardziej zbliżony rozkład odpowiedzi i najistotniejsze dla badanych osób były zmienne: *W35* – bezpieczeństwo osobiste w podróży (np. kradzieże w środkach transportu) oraz *W36* – bezpieczeństwo ruchu pojazdu komunikacji zbiorowej (prawdopodobieństwo zdarzenia komunikacyjnego). Następne zmienne to *W39* – dostępność do parkingów (łatwość zaparkowania) oraz *W43* – przepustowość głównych tras komunikacyjnych (korki).

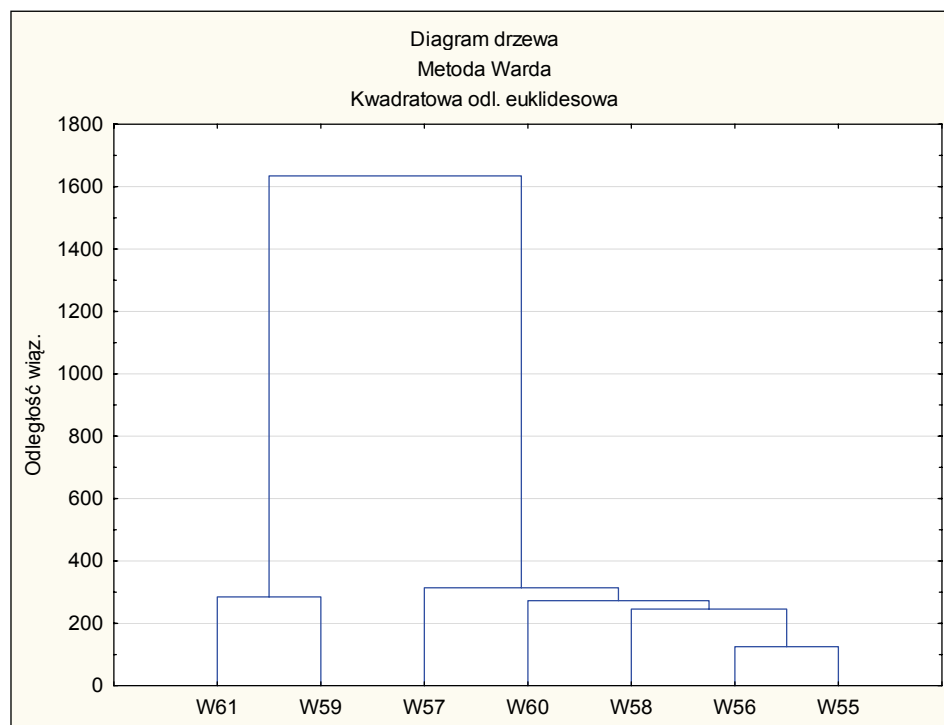


**Rys. 7.** Dendrogram dla grupy zmiennych P7 – Sąsiedztwo (W48-W54)

Źródło: Opracowanie własne.



Najważniejsze atrybuty w ocenie sąsiedztwa (rys. 7) utworzyły trzy równoważne skupienia, wskazując na pary zmiennych: lokalizację miejsca zamieszkania (*W54*) i to, że sąsiedzi są hałaśliwi (*W51*), następnie fakt, że sąsiedzi są ubodzy (*W49*) oraz że sąsiedzi mają podejrzaną dochody (*W49*). Trzecie równoważne oceny dotyczą zmiennych: sąsiedzi są odmiennego wyznania (religii) (*W52*) oraz sąsiedzi są innej orientacji seksualnej (*W53*). Najbardziej rozproszone oceny ma zmienna *W48* – kto jest twoim sąsiadem (narodowość).

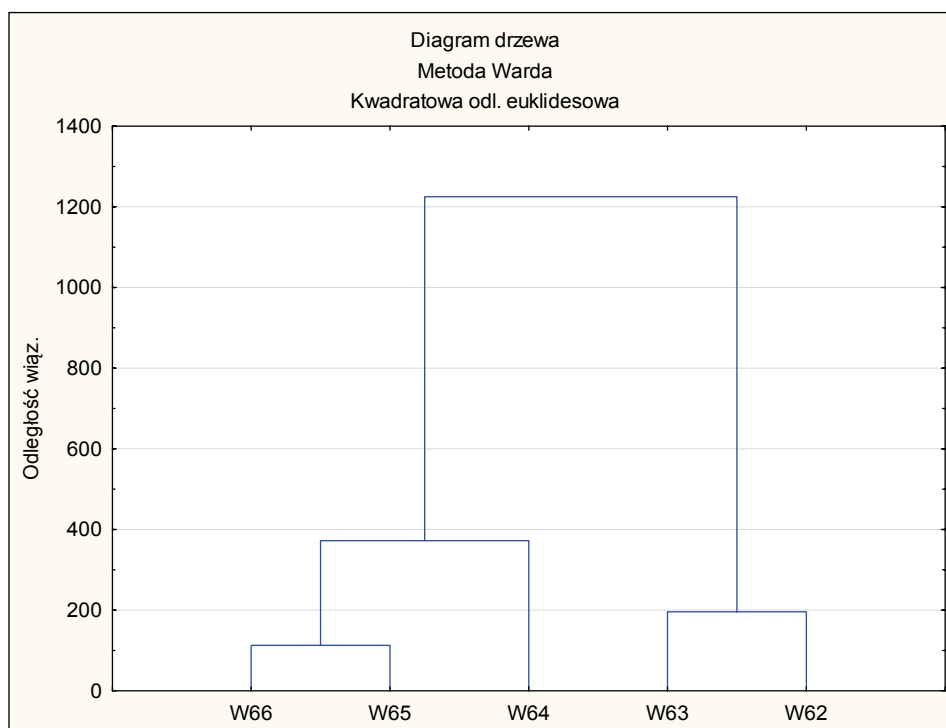


**Rys. 8.** Dendrogram dla grupy zmiennych P9 – Bezpieczeństwo (W55-W61)

Źródło: Opracowanie własne.

Skupienia z grupy zmiennych nazwanych „bezpieczeństwo” wskazały na czytelny ranking ocen badanych zmiennych, zatem mamy uporządkowane preferencje wśród badanych osób (rys. 8). Najistotniejsze są zmienne w pierwszym skupieniu – bezpieczeństwo na drogach, przejścia dla pieszych (*W55*) oraz bezpieczeństwo otoczenia takiego jak ulica, przystanek, dzielnica (*W56*). W następnej kolejności mamy zmienną bezpieczeństwo w miejscach publicznych (*W58*) i kolejno gotowość służb na sytuacje kryzysowe (*W60*). Na tym samym poziomie ważności co zmienna *W60*, są zmienne: (*W59*) czy należy zwiększać ilość

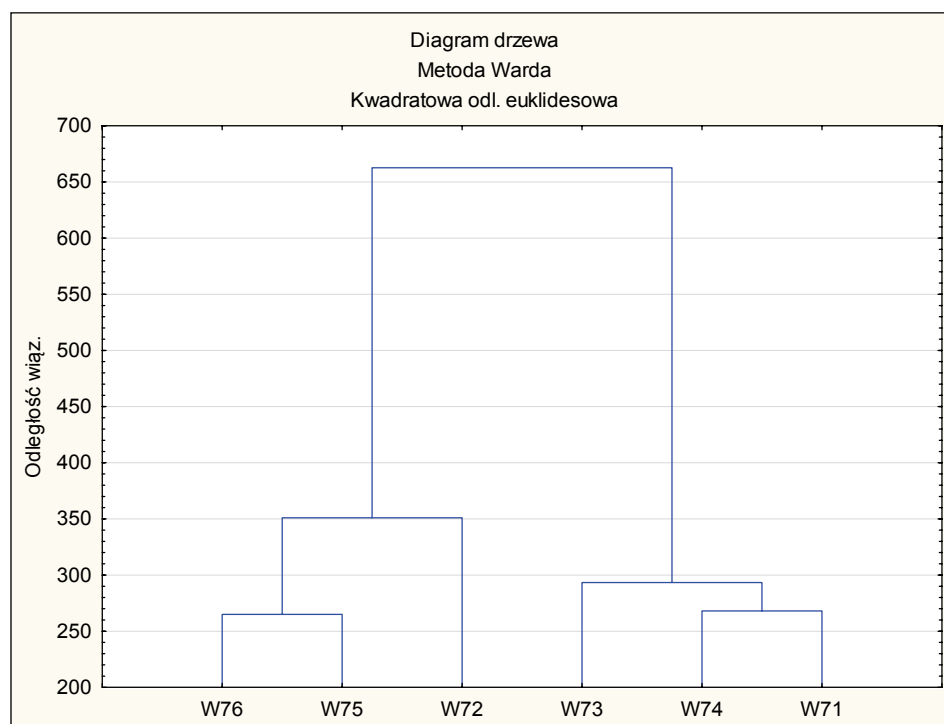
osiedli strzeżonych oraz (*W61*) zamieszkanie w osiedlu zamkniętym/strzeżonym. Ostatnią zmienną w tej grupie, najmniej istotną dla badanych osób, jest bezpieczeństwo w godzinach nocnych (*W57*).



**Rys. 9.** Dendrogram dla grupy zmiennych P9 – Akceptacja (W62-W66)

Źródło: Opracowanie własne.

Najważniejsze atrybuty w ocenie grupy zmiennych nazwanych „akceptacja” (rys. 9) utworzyły jedno skupienie, wskazując na parę zmiennych: wsparcie dla osób wymagających pomocy – osoby starsze (*W65*) oraz wsparcie dla osób wymagających pomocy – osoby niepełnosprawne (*W66*). Drugie skupienie o większym rozproszeniu odpowiedzi, mają dwie zmienne: akceptowanie/tolerowanie mniejszości narodowych i etnicznych (*W62*) oraz akceptowanie/tolerowanie mniejszości seksualnych (*W63*), co informuje o mniejszym znaczeniu tych atrybutów w porównaniu ze zmiennymi w pierwszym skupieniu. Największe rozproszenie w ocenach uzyskała zmienna oceniająca wsparcie dla osób wymagających pomocy – osoby bezdomne (*W64*).



**Rys. 10.** Dendrogram dla grupy zmiennych P11 – Przestrzeń publiczna (W71-W76)

Źródło: Opracowanie własne.

Najważniejsze atrybuty w ocenie przestrzeni publicznej utworzyły dwa równoważne skupienia (rys. 10), wskazując na pary zmiennych: istnienie części miasta, w których człowiek ma możliwość nieograniczonego spotykania się z innymi (*W71*) oraz łatwość dotarcia do przestrzeni publicznej pieszo, rowerem itp. (*W74*) Analogiczną wagę mają łatwość dotarcia do przestrzeni publicznej transportem indywidualnym (*W75*) oraz łatwość dotarcia do przestrzeni publicznej transportem zbiorowym (*W76*). W następnej kolejności istotne dla badanych osób jest zwiększanie ilości przestrzeni ogólnodostępnej (*W73*). Największe rozproszenie w ocenach uzyskała zmienna oceniająca, czy tego typu przestrzeni (ogólnodostępnych) jest w mieście wystarczająca ilość dla odczucia wysokiej jakości życia (*W72*).

## Podsumowanie

Współczesne miasta nie gwarantują seniorom bezpiecznego i komfortowego życia. Przeprowadzone badania pozwalają na wyprowadzenie kilku generalnych stwierdzeń w zakresie:

- zdrowia: najistotniejsza jest dostępność do jednostek ochrony zdrowia, jakość świadczonych usług medycznych oraz poziom służby zdrowia (specjalizacja regionu). Równie ważne są kolejki oczekujących na wizytę oraz koszty leczenia, zwłaszcza te dodatkowe, gdy wizyta jest niezbędna w krótkim terminie i realizacja świadczenia musi być wykonana w prywatnej praktyce lekarskiej. Odpowiedzi były bardzo jednorodne w całej badanej grupie respondentów, na co wskazują małe odległości,
- mobilności: czyli zdolności do przemieszczania się, bądź inaczej – pokonywania przestrzeni – zauważalna jest tendencja do wiązania poczucia jakości życia ze środkami ułatwiającymi przemieszczanie – generalnie z komunikacją zbiorową. Ważne okazały się warunki oczekiwania na pojazd czy transfer między pojazdami, oraz jakość usług transportu zbiorowego i możliwe alternatywne sposoby przemieszczania. Warunki finansowe tych przemieszczeń okazały się mniej istotne, co prawdopodobnie związane jest z powszechnymi zniżkami przysługującymi seniorom bądź bezpłatnymi przejazdami po 70. roku życia. W grupie istotnych atrybutów, wpływających na wycenę jakości życia znajdują się również aspekty bezpieczeństwa (osobistego i transportowego),
- sąsiedztwa: ten wymiar życia nie jest dla respondentów aż tak bardzo znaczący jak zdrowie (odległości na osi pionowej w porównaniu ze zmienną „zdrowie” są znacząco większe, co oznacza zróżnicowanie odpowiedzi). Oczywiście wskazano na ważne zmienne, takie jak lokalizacja miejsca zamieszkania oraz otoczenie, w jakim się żyje, czyli sąsiedztwo – hałaśliwe lub ubogie albo o nieznanym dochodach. Nie jest to jednak czynnik priorytetowy,
- bezpieczeństwa: preferencje są czytelne – najistotniejsze są bezpieczeństwo na drogach, przejścia dla pieszych oraz bezpieczeństwo otoczenia takiego jak ulica, przystanek, dzielnica i bezpieczeństwo w miejscach publicznych. To ważna informacja dla tych służb, które są odpowiedzialne za organizację miast. To generuje konkretne zadania w społeczeństwie, w którym zgodnie z prognozą GUS, w 2020 r. co trzeci Polak będzie w wieku 65+. Mamy spójność ocen z opiniami w zakresie mobilności. Dla osób starszych ważna jest również gotowość służb na sytuacje kryzysowe,
- akceptacji: w zakresie potrzeb codziennej egzystencji istotne jest wsparcie dla osób wymagających pomocy, takich jak osoby starsze lub osoby niepeł-

nosprawne. Powiązanie odpowiedzi jest najsilniejsze w całej grupie badanych zmiennych, silniejsze niż w ocenie zdrowia. To czytelne zadania dla polityki społecznej i wszelkich działań dla organizacji pozarządowych, które zawsze będą miały w tym zakresie w ocenie respondentów najwyższy priorytet,

- przestrzeni publicznej: wydawać by się mogło, że jakość przestrzeni publicznej ma bardzo ważne znaczenie dla seniorów. To podejrzenie znajduje swoje uzasadnienie w badaniach w dwóch perspektywach – istnienia oraz ilości miejsc publicznych, w których można realizować interakcje osobiste z innymi członkami społeczności, oraz łatwość w dotarciu do tychże przestrzeni transportem zbiorowym.

Dostosowanie miasta do potrzeb seniorów to zadanie wielowątkowe i wieloaspektowe. Wymaga nie tylko tworzenia śmiałej polityki miasta, ale umiejętne koordynowanej działalności praktycznie wszystkich służb miejskich oraz pozyskania przychylności wszystkich interesariuszy miasta. W sferze naukowej otwiera nowe pola badawcze. Jest wyzwaniem zarówno dla architektów, transportowców, logistyków, którzy współtworzą przestrzeń miasta, ale też psychologów, socjologów, lekarzy, fizykoterapeutów, specjalistów w zakresie świadczenia usług publicznych i finansistów, wreszcie – politologów i specjalistów public relations. W tych obszarach można i należy podejmować zadania proponujące rozwiązania sprzyjające poprawie jakości życia seniorów w miastach.

## Literatura

- Bromley D.B. (1969), *Psychologia starzenia się*, Warszawa.
- Bury P., Markowski T., Regulski J. (1993), *Podstawy ekonomiki miasta*, Fundacja Rozwoju Przedsiębiorczości, Łódź.
- Jak się żyje osobom starszym w Polsce?*, (2012), GUS, Warszawa.
- Kolman R. (2000), *Zespoły badawcze jakości życia*, „Problemy Jakości”, 2.
- Szołtysek J. (2009), *Podstawy logistyki miejskiej*, Wydawnictwo Akademii Ekonomicznej w Katowicach, Katowice.
- Szołtysek J. (2015), *Potencjał logistyki w realizacji ambicji miasta*, „Gospodarka Materialowa i Logistyka”, 7.
- Szołtysek J. (2014), *Uspołecznienie procesu zarządzania logistycznym miastem*, „Logistyka”, nr 5.
- Szołtysek J., Otręba R. (2015), *Wieloaspektowa analiza czynników kształtujących poczucie jakości życia w mieście – jako przesłanka tworzenia polityki logistycznej miasta*, Zeszyty Naukowe Uniwersytetu Ekonomicznego we Wrocławiu [artykuł po recenzji – przyjęty do druku].

- Szoltysek J., Trzpiot G. (2015), *Przemiany demograficzne a mobilność mieszkańców miast*, Studia Ekonomiczne Uniwersytetu Ekonomicznego w Katowicach (w druku).
- Szoltysek J., Trzpiot G. (2012), *Cluster analysis in description some communication behavior*, Zeszyty Naukowe Politechniki Częstochowskiej, Zarządzanie 5.
- Szoltysek J., Trzpiot G. (2012a), *Drzewa klasyfikacyjne w badaniu preferencji komunikacyjnych*, [w:] T. Trzaskalik (red.), *Modelowanie preferencji a ryzyko '12*, Studia Ekonomiczne - Zeszyty Naukowe Wydziałowe nr 97, Uniwersytet Ekonomiczny w Katowicach, Katowice.
- Szoltysek J., Twaróg S., *Senior friendly cities – a case of European cities*.
- Trzpiot G., Ojrzynska A. (2014), *Analiza ryzyka starzenia demograficznego wybranych miast w Polsce*, Zeszyty Naukowe UE Katowice.
- Trzpiot G. (2013), *Prognozy ludności dla Polski – perspektywa logistyki społecznej*, Studia Ekonomiczne Uniwersytetu Ekonomicznego w Katowicach, Zeszyty Naukowe Wydziałowe nr 175, Katowice, s. 70-91.
- Trzpiot G. (2014), *Przemiany demograficzne a zdrowie publiczne*, Logistyka. Współczesne wyzwania, nr 5, Wydawnictwo PWSZ, Wałbrzych, s. 67-86.
- WHOQOL Group (1995), *The World Health Organisation quality of life assessment (WHOQOL): Position paper from the world health organisation*. Soc. Sci. Med. 41.
- Witkowski J., Kiba-Janiak M. (2014), *Modelowanie logistyki miejskiej*, PWE, Warszawa.

#### ANALYSIS OF THE PREFERENCE OF THE QUALITY OF LIFE OF SENIORS IN CITIES

**Summary:** Analysis of the preference of the quality of life of seniors in cities occurring demographic changes in the society are deciding about new areas of research. In particular preferences of the elderly were provided with examinations. Analysis of the preference for which we will use a multidimensional statistical analysis in the quality assessment of living in cities by older residents is a purpose of the article. Analysis will be conducted based on data obtained from the conducted questionnaire survey amongst an elderly men inhabiting the Silesian province. The questionnaire form was filed from a few blocks of questions, respondents answered on the ordinal scale.

**Keywords:** multidimensional analysis of the preference, city, quality of life.



**Stanisław Wieteska**

Uniwersytet Humanistyczno Ekonomiczny im. Jana Kochanowskiego  
Filia w Piotrkowie Trybunalskim  
Wydział Nauk Społecznych  
Katedra Ekonomii  
ie@unipt.pl

## **UBEZPIECZENIA ODPOWIEDZIALNOŚCI CYWILNEJ PODMIOTÓW ZA SZKODY WYRZĄDZONE PRZEZ NIEBEZPIECZNE PRODUKTY NIEŻYWNOŚCIOWE CODZIENNEGO UŻYTKOWANIA W GOSPODARSTWACH DOMOWYCH W POLSCE**

**Streszczenie:** Celem tego artykułu jest ocena stanu, możliwości i potrzeb w zakresie ubezpieczenia odpowiedzialności cywilnej podmiotów za produkt. Rozważania ograniczymy jedynie do odpowiedzialności cywilnej za produkty nieżywnościowe codziennego użytkowania w gospodarstwach domowych. Pokażemy skalę alertów, a także możliwości ubezpieczenia podmiotów i ich odpowiedzialności cywilnej.

**Słowa kluczowe:** niebezpieczne produkty nieżywnościowe codziennego użytku, ubezpieczenie odpowiedzialności cywilnej.

### **Wprowadzenie**

Cechą charakterystyczną obecnej cywilizacji jest masowa produkcja różnego rodzaju produktów. Pomimo coraz większego postępu technicznego, organizacyjnego i zabezpieczeń prawnych w dalszym ciągu są wprowadzane do obrotu produkty wadliwe czy niebezpieczne. Skala tych przypadków nie maleje, lecz wręcz wzrasta, gdyż wiele produktów powstaje w wyniku innowacyjności, pomysłów, które nie zostały do końca zweryfikowane przez konsumentów. Za złą jakość tych wyrobów wprowadzanych do obrotu odpowiadają producenci. Jest to odpowiedzialność cywilna za produkt. Wymagania konsumentów ciągle rosną

i spotyka się coraz więcej roszczeń konsumentów za wadliwe produkty skierowane do sprzedaży.

Wraz z rozwojem odpowiedzialności za produkt (nie tylko w Polsce)<sup>1</sup> proponuje się ubezpieczenie tej odpowiedzialności. Ubezpieczenie OC za produkt funkcjonuje w wielu krajach Europy i Ameryki Północnej. W Polsce również podejmowano próby wprowadzenia do praktyki ubezpieczeniowej takiego produktu.

Ubezpieczenie OC za produkty żywnościowe wymaga odrębnego opracowania. Stawiamy tutaj tezę, że objęcie ochroną ubezpieczeniową odpowiedzialności za te produkty:

- wzmacnia sytuację klienta, gdyż łatwiej uzyskać odszkodowanie,
- ułatwia pracę sądów w zakresie rozpatrywania roszczeń wobec klientów,
- chroni producentów różnych artykułów.

Artykuł napisano w oparciu o załączoną literaturę.

## 1. Pojęcie produktu (niebezpiecznego) codziennego użytkowania

Zgodnie z art. 449 §2 k.c. przez produkt rozumie się „rzecz ruchomą, choćby została ona połączona z inną rzeczą. Za produkt uważa się także zwierzęta i energię elektryczną”.

Zgodnie z art. 449<sup>1</sup> §3 k.c. „niebezpieczny jest produkt niezapewniający bezpieczeństwa, jakiego można oczekiwać, uwzględniając normalne użycie programu. O tym, czy produkt jest niebezpieczny, decydują okoliczności z chwili wprowadzenia go do obrotu, a zwłaszcza sposób zaprezentowania go na rynku oraz podane konsumentowi informacje o właściwościach produktu”.

Zgodnie z art. 22 k.c. za konsumenta uważa się „osobę fizyczną dokonującą czynności prawnej niezwiązanej bezpośrednio z jej działalnością gospodarczą lub zawodową”<sup>2</sup>.

Pod pojęciem wprowadzenia go do obrotu rozumieć będziemy dystrybucję, magazynowanie, a także włączenie do sprzedaży w sieci handlowej.

Potrzeba zmniejszenia strat ponoszonych przez wprowadzenie do obrotu niebezpiecznych produktów przyczyniła się do:

- wprowadzenia rejestru takich przypadków,
- niezbędnego monitorowania (system RAPEX),

<sup>1</sup> Por. m.in. M. Nestorowicz [1989], *Ubezpieczenie odpowiedzialności cywilnej za produkt*, „Wiadomości ubezpieczeniowe”, nr 5, s. 3-5.

<sup>2</sup> Obszerną wykładnię pojęcia „konsument” przeprowadził P. Kowalczyk [2014], *Definicje konsumenta w kodeksie cywilnym (obecnym i przyszłym) w kontekście najnowszych unijnych dyrektyw konsumenckich*, „Przegląd prawa handlowego”, nr 5, s. 18-25.



- systemu wczesnego ostrzegania o niebezpiecznych produktach spożywczych i środkach żywienia zwierząt (RASFF).

W ramach odpowiedzialności za produkt mogą być włączone [Molęda, 2014, s. 40-41]:

- wady konstrukcyjne,
- przekroczenie ustawowego zakresu (umownego) odpowiedzialności cywilnej,
- dostarczenie produktu innego niż uzgodniono<sup>3</sup>.

Pod pojęciem produktów nieżywnościowych codziennego użytku będziemy rozumieć produkty, które zostały:

- zakupione w sieci handlowej,
- zidentyfikowani są producenci tych produktów,
- nie służą celom spożywczym,
- są użytkowane przez członków gospodarstw domowych.

Z tego obszaru wyłączamy pojazdy samochodowe, gdyż zasługują one na odrębne opracowanie.

## 2. Odpowiedzialność cywilna za produkt

Już w 1972 r. Kongres USA uchwalił ustawę „O zabezpieczeniu konsumentów przed szkodliwością (*Consumer Product Safety Act*). Ustawa ta regulowała różnego rodzaju zagadnienia związane z obrotem towarowym i jego skutkami [Chamski, 1977, s. 5].

Dyrektywa Ogólna w Sprawie Bezpieczeństwa Produktów z 15 stycznia 2004 r., wprowadzona w 15 państwach UE, obowiązywać zaczęła w nowych państwach członkowskich. Dyrektywa poszerzyła zakres odpowiedzialności za produkt i obejmuje nią wszystkich dostawców w łańcuchu produkcji i dystrybucji, w tym importerów i producentów części składowych, a także usługi. Te nowe przepisy oznaczają, że ciężar dowodu zostaje przeniesiony na producenta w przypadku strat na osobie. Poszkodowany nie musi już udowadniać zaniedbania. Wprowadzony tą Dyrektywą system odpowiedzialności gwarancyjnej oznacza, że dostawcy i producenci muszą dowieść, że zrobili wszystko, aby zapobiec lub zminimalizować ryzyko szkody na osobie jako ostatnim ogniwie łańcucha dostaw.

Zgodnie z Dyrektywą 374/85 WE ustawodawca polski wprowadził art. 449 k.c. do 449<sup>11</sup> ustalając dolny próg odpowiedzialności w wysokości 500 euro (art. 449<sup>7</sup> §2),

<sup>3</sup> Więcej na ten temat: R. Stefanicki (2009), *Odpowiedzialność sprzedawcy z tytułu rękojmi za wady rzeczy a odpowiedzialność za zgodność towaru z umową*. Część I, „Ekonomika przedsiębiorstwa”, nr 11, s. 38-39.

odszkodowanie nie przysługuje, gdy szkoda na mieniu nie przekracza tej kwoty [Sikora, 2013]. Kwotowe ograniczenie minimalnej wartości szkody, za które producent nie ponosi odpowiedzialności lub wprowadzający produkt do obrotu ma za zadanie wyłącznie z reżimu szkód drobnych. Jest to tzw. franszyza integralna, dzięki której ustawodawca ma na uwadze interes przedsiębiorców.

W 2000 r. ukazuje się ustawa o bezpieczeństwie produktów [Dz.U. Nr 15 poz. 179]. Również w tym roku wychodzi wykonawcze Rozporządzenie o systemie monitorowania wypadków konsumenckich [Rozporządzenie Rady Ministrów z 20 grudnia 2000 r.]. Przez wypadek konsumencki rozumie się „każde zdarzenie zachodzące w związku z używaniem przez konsumentów produktów, którego następstwem jest zgon lub uraz wymagający udzielenia pomocy lekarskiej, w szczególności zatrucie dzieci w wyniku spożycia leków lub innych substancji chemicznych”. Nie są wypadkami konsumenckimi np. wypadki przy pracy, wypadki komunikacyjne, wypadki umyślne (samobójstwa, samookaleczenia), przypadki napaści fizycznej innych osób.

Ryzyko towarzyszące odpowiedzialności cywilnej za produkt, to m.in. [Molęda i Gołąb, 2011, s. 37-38]:

- ryzyko szkód osobowych i rzeczowych,
- ryzyko kosztów wycofania produktu,
- ryzyko dodatkowych kosztów w przypadku wadliwości produktu (np. koszty zewnętrzne),
- ryzyko obniżenia obrotów handlowych (kupno–sprzedaż),
- inne ryzyka (np. reklamacje, regresy, utraty zysku),
- ryzyko zanieczyszczenia środowiska.

Przy ocenie ryzyka dotyczącego produktu zwraca się uwagę, czy ma się do czynienia z półfabrykatem, czy wyrobem gotowym.

Również ważne są negocjacje i uzgodnienia w celu wyjaśnienia przyczyn okoliczności, a także poszukiwania dróg napraw w sytuacji kryzysowej związanej z wprowadzeniem do obrotu wadliwego produktu.

Odpowiedzialność cywilna dotyczy oddziaływania produktu na końcowego odbiorcę. Innymi słowy produkt powinien być bezpieczny w ciągu całego tzw. cyklu życia.

Wdrożenie Dyrektywy 2001/95/WE Parlamentu Europejskiego i Rady z 3 grudnia 2001 r. w sprawie bezpieczeństwa produktów, które weszły w życie spowodowało, że stworzone zostały bardzo rygorystyczne wymagania wobec produktów wprowadzanych na rynek.

Odpowiedzialność za produkt może objąć dość szeroki krąg podmiotów m.in. [Ravasi i Stigliani, 2013, s. 40-41]:

- wytwórcę produktu lub producentów komponentów,

- osobę umieszczającą znak na produkcie (tzw. quasi-producent),
- sprzedawcę, jeśli w ciągu 1 miesiąca nie jest on w stanie wskazać producenta w przypadku szkody,
- kooperantów w produkcji,
- projektantów produktu.

Zwraca się uwagę, że ryzyko dostarczenia wadliwego produktu lub produktu innego niż uzgodniono, należy postrzegać nie tylko w relacji producent–konsument, ale przede wszystkim w relacji *bussines to bussines* (B2B) [Mołęda, 2012, s. 33]. To właśnie w tym obszarze powstaje największe prawdopodobieństwo związane z odpowiedzialnością za produkt. Innymi słowy łańcuch producentów, dostawców, sprzedawców, kooperantów, kontrolerów i innych może być relatywnie długi i uzależniony od złożoności wprowadzonego produktu. Mówimy tutaj o „ogniwach łańcucha” także w relacjach rynku międzynarodowego.

Odpowiedzialność producenta może mieć miejsce wobec każdej poszkodowanej osoby. Krąg osób poszkodowanych nie jest ograniczony co do miejsca i czasu. Roszczenia dochodzić mogą nabywcy rzeczy, użytkownicy oraz każda inna osoba poszkodowana nawet niebędąca użytkownikiem (np. przechodzień w razie wypadku komunikacyjnego spowodowanego konstrukcyjną wadą pojazdu). W razie szkód na osobie roszczeń mogą także dochodzić osoby pośrednio poszkodowane.

### 3. Rola Urzędu Ochrony Konkurencji i Konsumentów (UOKiK)

Nadzór nad bezpieczeństwem produktów nieżywnościowych w Polsce sprawuje UOKiK. Urząd wszczyna postępowanie po otrzymaniu od konsumentów lub organów innych krajów UE informacji<sup>4</sup> o produktach zagrażających życiu użytkowników. Coraz częstszy jest fakt, że przedsiębiorcy dobrowolnie zawiadamiają UOKiK o wykrytych nieprawidłowościach i podjętych działaniach naprawczych. Po zamieszczeniu informacji w Internecie i innych środkach masowego przekazu, UOKiK monitoruje przebieg akcji naprawczych. Na zlecenie UOKiK inspektorzy Inspekcji Handlowej przeprowadzają kontrolę producentów towarów i usług. Statystykę kontroli wybranych grup asortymentowych przedstawia tabela 1.

<sup>4</sup> Warto w tym miejscu przypomnieć, że przez Komisję Europejską powstał system Rapex (*Rapid Alert System for Non-Food Consumer Products*) po to, by zapewnić wysoki poziom ochrony zdrowia i bezpieczeństwa konsumentów na obszarze Unii Europejskiej. Umożliwia on szybką wymianę informacji między państwami członkowskimi. W UOKiK funkcjonuje polski punkt kontaktowy dla tego systemu.

**Tabela 1.** Statystyka planowanych kontroli przez Inspekcję Handlu w Polsce w latach 2011-2013

| Lp. | Przedmiot kontroli                      | 2011 | 2012 | 2013 |
|-----|-----------------------------------------|------|------|------|
| 1   | artykuły rolno-spożywcze                | 3129 | 2360 | 9751 |
| 2   | artykuły nieżywnościowe i usługi        | 1805 | 1372 | 4463 |
| 3   | ogólne bezpieczeństwo produktów         | 1905 | 1162 | 1469 |
| 4   | zgodność z dyrektywami nowego podejścia | 2237 | 1827 | 2130 |

Źródło: Sprawozdania z działalności UOKiK za 2011, 2012 i 2013 r.

Z danych zawartych w tabeli 1 wynika coraz większa liczba kontroli artykułów. Szczegółowe wyniki kontroli prowadzonych przez UOKiK w Polsce przedstawia tabela 2.

**Tabela 2.** Wyniki kontroli przeprowadzonych przez UOKiK w latach 2011-2013

| Lp. | Wyszczególnienie                                                       | 2011         | 2012         | 2013         |
|-----|------------------------------------------------------------------------|--------------|--------------|--------------|
| 1   | sprawy prowadzone<br>w tym zakończonych                                | 350<br>°     | 332<br>260   | 301<br>241   |
| 2   | dobrowolne powiadomienia przedsiębiorców                               | 93           | 123          | 89           |
| 3   | przebadane próbki w laboratoriach<br>w tym zakwestionowane             | °<br>°       | 5623<br>1177 | 5573<br>1670 |
| 4   | próbki paliw płynnych skontrolowanych<br>w tym nie spełniające wymagań | 483<br>4,14% | 468<br>2,99% | 945<br>3,92% |
| 5   | gaz skroplony próbki skontrolowane<br>w tym nie spełniające wymagań    | °<br>°       | 451<br>2,35% | 496<br>2,22% |

Źródło: Sprawozdania z działalności UOKiK za 2011, 2012 i 2013 r.

Z danych zawartych w tabeli 2 wynika, że wiele produktów nie spełniało podstawowych norm jakościowych. Spotyka się także dobrowolne zgłoszenia przez przedsiębiorców o wadliwych towarach skierowanych do sprzedaży np. ok. 2-4% paliw nie spełnia norm jakościowych. W 2013 r. do rejestru wpisano 68 produktów, były to zabawki i sprzęt elektryczny.

#### 4. Studia przypadków

Pierwszym symptomem, że wprowadzone do obrotu towary nie spełniają obowiązujących norm, mogą być reklamacje klientów. Wówczas konieczne jest, aby producent w właściwy sposób zapoznał się ze zgłoszonymi reklamacjami po to, by zakwalifikować ten towar jako niebezpieczny<sup>5</sup>.

W świetle danych UOKiK w latach 2006-2007 najwięcej wyrobów niezgodnych z zasadniczymi wymaganiami bezpieczeństwa stanowiły maszyny

<sup>5</sup> Więcej na temat sposobów postępowania: J. Barlow, C. Moller (2001), *Reklamacja, czyli prezent. Strategia korzystania z informacji od klienta*, PWN Warszawa.

(25%), sprzęt elektryczny (23%), zabawki (22%), wyroby budowlane (14%), środki ochrony indywidualnej (8%) [Zymonik i Wasińska, 2008, s. 27].

W szczególności niebezpieczne produkty stanowią zabawki dla dzieci, zwłaszcza tych w wieku 3-5 lat, gdzie ciekawość poznawania jest duża<sup>6</sup>. W tym celu ukazał się specjalny akt prawny [Rozporządzenie Ministra Gospodarki].

W latach 2005-2006 w Polsce Inspekcja Handlowa skontrolowała 5076 zabawek dla dzieci [Kosiarski, 2004]. W wyniku kontroli:

- 1351 nie posiadało instrukcji od producenta lub importera,
- 211 było źle oznakowanych znakiem CE bądź brakowało tego znaku,
- 144 zabawki uzyskały złe wyniki laboratoryjne.

Badania wykazują [Mamrot i in., 2005, s. 19-24], że niektóre zabawki dla dzieci wytwarzają w swoim otoczeniu pole elektromagnetyczne (PEM) o wartościach przekraczających wartości dopuszczalne wg przepisów ochrony środowiska. Wielkość ekspozycji zależy od rodzaju zabawki i wieku dziecka. Większość zabawek pochodziła z Chin. Przeprowadzony sondaż „Gazety Prawnej” PBS DGA i Radia PIN w 2006 r. wykazały, że [Aksztajn i Manikowski, 2006]:

- ok. 24% respondentów zakupiło towar z wadą,
- ok. 67% podjęło próbę złożenia reklamacji,
- bezpośrednimi przyczynami nieskładania reklamacji były: brak wiary w jej skuteczność, niewielka wartość rzeczy reklamowanej, kłopotliwość procedur,
- sprzedawcy niechętnie uznają reklamacje,
- do wadliwych produktów, na które złożono reklamacje należały: obuwie (34%), sprzęt AGD (11%), usługi (10%), RTV (6%), części i akcesoria (8%).

W latach 2003-2007 UOKiK skierował 77 zawiadomień o popełnionych przestępstwach związanych z wprowadzeniem niebezpiecznych produktów [Trocha, 2007].

Przeprowadzone w 2004 r. badanie produktów nieżywnościowych pochodzących z Chin wykazało, że konsumenci ocenili jakość na 2,8 pkt. na 10 możliwych. Średnia trwałość produktów na 27,3 miesiąca, zaś analogicznych wytworzonych poza Chinami 72,12 miesiąca [Rogała, 2011, s. 40].

Alerty<sup>7</sup> dla produktów nieżywnościowych (w 2007 r.) dotyczą [Ilkiewicz, 2008, s. 34]: zabawek (31%), samochodów (15%), urządzeń elektrycznych (12%), oświetlenia (6%), kosmetyków (6%) oraz 30% innych artykułów.

Z badań nad odpowiedzialnością za produkt przeprowadzonych przez K. Zymonika wynika, że przedsiębiorstwa można podzielić na dwie grupy:

- pierwsza – przedsiębiorstwa mające certyfikowane systemy jakości,

<sup>6</sup> Więcej na ten temat: B. Gryniewicz-Bylina (2011), *Procedura oceny bezpieczeństwa użytkowania zabawek*, „Problemy jakości”, nr 12, s. 35-41.

<sup>7</sup> Alert oznacza zawiadomienie o wykryciu niebezpiecznych produktów.

- druga – przedsiębiorstwa niemające takich systemów bądź ubiegające się o takie systemy.

Jak się okazuje, przedsiębiorstwa z grupy pierwszej są bardziej świadome odpowiedzialności za produkt niż te z grupy drugiej. Aby znaleźć się w grupie pierwszej, wymaganych jest wiele szkoleń, zmiany świadomości, a także doskonalenia procesów technologicznych. Z badań K. Zymonika wynika m.in. [Zymonik, 2002, s. 34-37]:

- ok. 5% przedsiębiorstw ma udokumentowane procedury rozpoznania ryzyka z odpowiedzialnością za produkt,
- jedynie co trzecie przedsiębiorstwo gromadzi środki finansowe na ewentualne odszkodowanie będące rekompensatą dla klienta za poniesione straty spowodowane wadliwym produktem,
- niska znajomość reguł odpowiedzialności za produkt w świetle wymagań Unii Europejskiej,
- niska świadomość skutków wadliwości produktów na tle obowiązujących przepisów prawnych dotyczących bezpieczeństwa ich użytkowania,
- niska świadomość dotycząca braku ubezpieczenia odpowiedzialności cywilnej za produkt.

Podsumowując: „Koszty i czasochłonność usunięcia niezgodności rosną wraz z kolejnymi fazami procesu produkcyjnego procesów przygotowujących-wspomagających” [Fiodorow, 2011, s. 91].

Każdą wadę, która dotyczy wyrobów gotowych, należy zablokować, naprawić oraz przeanalizować wszelkie początkowe fazy, które doprowadziły do wysłania wadliwych produktów do klienta końcowego [Fiodorow, 2011, s. 91].

## 5. Ubezpieczeniowy punkt widzenia

Ubezpieczenie OC za produkty codziennego użytku w gospodarstwach domowych dotyczy produktów kierowanych na rynek na skalę masową. Przy założeniu masowości produkcji i dystrybucji mogą się pojawiać błędy przypadkowe w produkcji, których skutki powinny być objęte ochroną ubezpieczeniową.

Już w 1980 r. Towarzystwo Ubezpieczeń i Reasekuracji Warta wystąpiło z ofertą ubezpieczenia odpowiedzialności cywilnej producenta (eksportera) za szkody i straty powstałe w związku z użytkowaniem i konsumpcją przez zagranicznego nabywcę sprzedanych lub dostarczonych przez ubezpieczonego wyrobów, a także powstałej w następstwie:

- śmierci, uszkodzenia ciała lub rozstroju zdrowia,
- zniszczenia lub uszkodzenia cudzego mienia.

Również Państwowy Zakład Ubezpieczeń Obwieszczeniem Prezesa PZU w dniu 5 grudnia 1988 r. (MP 34 poz. 314) określił warunki ubezpieczenia odpowiedzialności cywilnej za wady produktu [Bajońska, 1990, s. 39-42]. Ubezpieczenie za produkt niebezpieczny obejmuje szkody wyrządzone nieumyślnie, w tym wskutek rażącego niedbalstwa. Ubezpieczenie OC za produkt oferowane jest jako składnik ubezpieczenia OC dla przedsiębiorstw bądź jako dodatkowe ubezpieczenie.

W 2011 r. funkcjonowały następujące przykładowe oferty towarzystw ubezpieczeniowych [Skibińska, 2011]:

- Compensa – ubezpieczenie OC oferowane było w ramach produktu Compensa Firma przeznaczonego dla małych i średnich przedsiębiorstw (MSP), których majątek wynosi do 10 mln zł; założono sumę gwarancyjną do 1 mln zł (chodzi o firmy, które w ramach swojej działalności wprowadzają produkty do obrotu),
- Ergo Hestia – OC za produkt niebezpieczny można wykupić w ramach OC z tytułu prowadzenia działalności gospodarczej lub użytkowania mienia,
- Aviva – ubezpieczenie OC za produkt było dostępne w ramach ubezpieczenia OC ogólnego,
- Allianz – umowa ubezpieczenia OC za produkt była umową dodatkową do ubezpieczenia OC działalności gospodarczej,
- Warta – ubezpieczenie OC za produkt niebezpieczny zawarte jest w ubezpieczeniu OC za produkt i wykonaną usługę.

Analiza ogólnych warunków ubezpieczeń odpowiedzialności cywilnej obowiązujących w 2015 r. wykazała, że<sup>8</sup>:

- poprzednio wprowadzone ubezpieczenia OC za produkt są coraz lepiej dopasowane do potrzeb,
- odpowiedzialność cywilna za produkt jest wdrożona w formie dodatkowych klauzul.

Wśród wielu badań nad ubezpieczeniem odpowiedzialności cywilnej za produkt należy wymienić pracę doktorską A. Gawrońskiego, który traktuje to ubezpieczenie jako instrument ochrony interesów konsumentów [Sangowski, 1987, s. 42-44].

Autor zwraca uwagę na rolę tego ubezpieczenia, wskazując m.in. na:

- problem wyrównania szkód konsumenckich,
- tkwiące w błędach ludzkich postępowanie w szeroko pojętym procesie produkcji, dystrybucji i eksploatacji produktów (droga do poprawy jakości produkcji),

<sup>8</sup> – Ogólne warunki ubezpieczenia Hestia Biznes, s. 23-25.

– Ogólne warunki ubezpieczenia małych przedsiębiorstw, Mój biznes (19035) (§ 22) Compensa.

– Ogólne warunki ubezpieczenia odpowiedzialności cywilnej AVIVA (Klauzula 14).

– Ogólne warunki ubezpieczenia odpowiedzialności cywilnej Allianz (§ 3).

Wszystkie w/w ogólne warunki zaczerpnięto ze źródeł internetowych.

- ewolucję prawa wokół ochrony interesów konsumentów,
- ochronę sytuacji majątkowej sprawcy zwłaszcza małych i średnich przedsiębiorstw,
- seryjność produkcji, która może zawierać wadliwe rozwiązania,
- zmniejszenie ilości spraw podejmowanych przez sądy (uproszczenie procedur dowodowych),
- nie obciąża praktycznie poszkodowanych żadnymi kosztami.

Ogólnie autor przedstawia funkcjonowanie tego ubezpieczenia w samych pozytywnych relacjach.

W praktyce ubezpieczeniowej brakuje standardu ubezpieczenia, w którym określone byłyby: zakres odpowiedzialności, wyłączenia, suma gwarancyjna, granice odpowiedzialności, sposoby likwidacji odpowiedzialności za konkretną grupę produktów (np. przemysłowych, farmaceutycznych).

### **Pole ubezpieczeniowe**

Dla przykładu należy wskazać na następujące branże: (gdzie potrzeby są ogromne) motoryzacyjne, materiały budowlane, produkty chemiczne, żywność i napoje sprzęt AGD.

Ochrona ubezpieczeniowa powinna objąć wszystkich producentów produktów codziennego użytku w gospodarstwach domowych.

Zatem pole ubezpieczeniowe jako maksymalna ilość podmiotów do ubezpieczenia jest bardzo szerokie. W celu zapewnienia bezpieczeństwa finansowego zakłady ubezpieczeniowe mogą ograniczać rozmiar pola, a także szkód, przez nieobejmowanie ubezpieczeniem producentów o najgorszych pod względem jakościowym produktach.

### **Zakres ubezpieczenia**

Odpowiedzialność ubezpieczyciela następuje w chwili, gdy produkt bądź zbiór produktów włączony jest do obrotu handlowego w okresie ubezpieczenia. Kończącą datą odpowiedzialności może być:

- koniec okresu gwarancyjnego,
- koniec przewidywanej trwałości (np. do spożycia, eksploatacyjnej).

Ubezpieczone mogą być produkty ściśle zidentyfikowane, wraz z lokalizacją terytorialną. We wniosku ubezpieczeniowym powinny być umieszczone m.in. informacje:

- o sposobie produkcji, dystrybucji, transporcie i składowaniu,
- sposobach kontroli wewnętrznej,
- zasadach zarządzania ryzykiem (zarządzania w okresie sytuacji kryzysowej),



- systemach zabezpieczenia,
- sposobach wycofania.

Do wyłączeń w ubezpieczeniu OC za produkt zaliczyć możemy:

- produkty testowane, prototypy, eksperymentalne,
- komponenty narażone na ryzyko wycofania,
- szkody spowodowane oddziaływaniem promieniowania, temperatury,
- szkody spowodowane zamieszkami wojennymi, strajkami, manifestacjami, akcjami protestacyjnymi,
- pogorszeniem się składu chemicznego, biologicznego i korozją,
- umyślnego działania personelu obsługującego,
- wydatki na sprawy sporne rozstrzygane przez sądy, kolegia itp.,
- niebezpiecznych zdarzeń przyrodniczych,
- w okresie rękojmi i obowiązywania gwarancji<sup>9</sup>.

### **Suma gwarancyjna**

Ważny element ubezpieczenia odpowiedzialności cywilnej stanowi suma gwarancyjna. Jak wiadomo suma gwarancyjna określona w umowie ubezpieczenia OC stanowi górną granicę odpowiedzialności. Suma gwarancyjna wyrażona w jednostkach pieniężnych może być ustalona na jedno zdarzenie lub wszystkie zdarzenia powstałe w okresie ochrony ubezpieczeniowej. Początkowe ustalenie minimalnej sumy gwarancyjnej jest zawsze dyskusyjne. Umownie możemy zaproponować 100 tys. euro za jedno zdarzenie i 500 tys. euro za wszystkie zdarzenia. W trakcie funkcjonowania ubezpieczenia praktyka ubezpieczeniowa skoryguje tę wysokość. Poza tym im większa suma gwarancyjna, tym wyższe składki ubezpieczeniowe.

Aby ustalić minimalną sumę gwarancyjną, należy wziąć pod uwagę m.in.:

- obszar wykorzystanych przepisów prawa, norm produkcyjnych,
- protokoły kontroli i naprawy, audytów,
- przestrzeganie technologii produkcji,
- wysokość przewidywanych roszczeń,
- wartość rocznej sprzedaży towarów.

Ten ostatni parametr ekonomiczny jest potrzebny do kalkulacji składki ubezpieczeniowej.

---

<sup>9</sup> Więcej na ten temat: K. Zymonik (2008), *Gwarancja konsumencka (komercyjna)*, „Problemy jakości”, nr 2, s. 30-34.

### Odpowiedzialność odszkodowawcza

Zgodnie z art. 449<sup>1</sup> §1 określa się, że kto wytwarza w zakresie swojej działalności gospodarczej (producent) produkt niebezpieczny, odpowiada za szkodę wyrządzoną komukolwiek przez ten produkt.

W myśl art. 449 §2 producent nie odpowiada za szkodę, „gdy właściwości niebezpieczne produktu ujawniły się po wprowadzeniu go do obrotu, chyba że wynikały one z przyczyn tkwiących poprzednio w produkcji”, również gdy „nie można było przewidzieć niebezpiecznych właściwości produktu, uwzględniając stan nauki i techniki w chwili wprowadzenia produktu do obrotu albo gdy właściwości te wynikały z zastosowania przepisów prawa”.

Producent, wytwórca materiału, surowca, części składowej produktu, osoby trzecie odpowiadają solidarnie.

W myśl art. 449 §1 i 449 §2 k.c. „odszkodowanie za szkodę na mieniu nie obejmuje uszkodzenia samego produktu ani korzyści, jakie poszkodowany mógłby osiągnąć w związku z jego używaniem oraz gdy szkoda nie przekracza kwoty będącej równowartością 500 euro”.

### Stopa składki ubezpieczeniowej

Podstawą obliczenia stopy składki jest określenie częstości szkód (prawdopodobieństwa). Jest to możliwe w przypadku produktów jednorodnych pod względem gatunku, sposobu produkcji, cech jakościowych. Wówczas częstość możemy obliczyć, biorąc pod uwagę ilość roszczeń w stosunku do ilości wyprodukowanych produktów. Jednakże dla celów ubezpieczenia OC za produkt powinniśmy wziąć pod uwagę producentów tych towarów. W szczególności:

- pozycję marketingową,
- reklamacje i skargi wnoszone przez klientów,
- dane z raportów UOKiK,
- rejestr nieuczciwych praktyk handlowych,
- wyniki monitoringu wypadków konsumenckich,
- obowiązujące przepisy o ochronie konsumentów [Ustawa z dnia 2 marca 2000 r.].

Słabe strony ubezpieczenia OC za produkt:

- próba przerzucenia odpowiedzialności cywilnej za złą jakość produktów na zakłady ubezpieczeń,
- wzrost szkód (roszczeń klientów) może spowodować spiralę wzrostu składek,
- wzrost roszczeń może skutkować wzrostem wypłaconych odszkodowań i świadczeń, a nawet rent czy utraconych korzyści,
- wzrost cen produktów i zahamowanie innowacyjności technicznych,
- trudne do sprecyzowania granice odpowiedzialności.

Do tego należy wziąć pod uwagę dotychczasowe doświadczenia wprowadzenia ubezpieczenia za produkt w innych zakładach ubezpieczeń.

Pozostałe założenia ogólnych warunków ubezpieczeń powinny być uzgodnione ze wszystkimi komórkami zakładu ubezpieczeń.

## Podsumowanie

Problematyka szkód spowodowanych przez niebezpieczne produkty nieżywnościowe okazuje się bardzo złożona z uwagi na zróżnicowaną ich ilość i przeznaczenie. Z artykułu wynikają następujące wnioski:

- wymagania stawiane produktom nieżywnościowym przez Dyrektywy UE są coraz ostrzejsze,
- ubezpieczenie odpowiedzialności cywilnej za produkty nieżywnościowe jest na rynku ubezpieczeń w stadium początkowym,
- ilość alertów w stosunku do produktów niebezpiecznych nie maleje,
- produkty niebezpieczne pojawiają się w wielu branżach przemysłowych.

Ograniczone ramy artykułu jedynie naświetliły skomplikowaną problematykę. Wymagane są dalsze szczegółowe badania.

## Literatura

- Aksztajn W., Manikowski A. (2006), *Z reklamacjami reklamacji*, „Gazeta prawna” z dnia 19 czerwca.
- Bajońska A. (1990), *Ubezpieczenie odpowiedzialności za produkt w praktyce*, „Wiadomości ubezpieczeniowe”, nr 7-8.
- Barlow J., Moller C. (2001), *Reklamacja, czyli prezent. Strategia korzystania z informacji od klienta*, PWN, Warszawa.
- Chamski P. (1977), *Ubezpieczenie odpowiedzialności za wady produktu (Products Liability insurance)*, „Wiadomości ubezpieczeniowe”, nr 5.
- Fiodorow A. (2011), *Szacowanie skutków wykrytej wady w procesie produkcyjnym*, „Zarządzanie Jakością”, nr 3.
- Grynkiewicz-Bylina B. (2011), *Procedura oceny bezpieczeństwa użytkowania zabawek*, „Problemy jakości”, nr 12.
- Ilkiewicz A. (2008), *Jak uprzedzić katastrofę*, „Miesięcznik Ubezpieczeniowy”, nr 12.
- Kosiarski M. (2004), *Zabawki, które grożą dzieciom*, „Rzeczpospolita”, nr 127 (7421).
- Kowalczyk P. (2014), *Definicje konsumenta w kodeksie cywilnym (obecnym i przyszłym) w kontekście najnowszych unijnych dyrektyw konsumenckich*, „Przegląd prawa handlowego”, nr 5.

- Mamrot P., Zmyślony M., Politański P., Aniołczyk H. (2005), *Ocena bezpieczeństwa zabawek – ze szczególnym uwzględnieniem bezpieczeństwa elektromagnetycznego – w świetle obowiązujących przepisów – badania wstępne*, „Medycyna Pracy”, nr 1.
- Molęda M. (2012), *Szkoda w łańcuchu dostaw*, „Miesięcznik Ubezpieczeniowy”, nr 4.
- Molęda M. (2014), *Odpowiedzialność za produkt*, „Miesięcznik Ubezpieczeniowy”, nr 7/8.
- Molęda M., Gołąb M. (2011), *Ryzyko produktu*, „Miesięcznik Ubezpieczeniowy”, nr 11.
- Nestorowicz M. (1989), *Ubezpieczenie odpowiedzialności cywilnej za produkt*, „Wiadomości Ubezpieczeniowe”, nr 5.
- Ravasi D., Stigliani I. (2013), *Projektowanie produktu z punktu widzenia teorii zarządzania*, „Marketing i rynek”, nr 5.
- Rogała P. (2011), *Badanie opinii konsumentów na temat produktów pochodzących z Chin*, „Problemy jakości”, nr 11.
- Rozporządzenie Ministra Gospodarki z dnia 5 kwietnia 2011 r. w sprawie zasadniczych wymagań dla zabawek. Dz.U. 2011, Nr 83, poz. 454.
- Rozporządzenie Rady Ministrów z 20 grudnia 2000 r. w sprawie krajowego systemu monitorowania wypadków konsumenckich. Dz.U. 2000, Nr 1, poz. 1.
- Sangowski T. (1987), *Ubezpieczenie odpowiedzialności cywilnej za wady produktu przedmiotem publicznej rozprawy doktorskiej w Akademii Ekonomicznej w Poznaniu*, „Wiadomości Ubezpieczeniowe”, nr 7-8.
- Skibińska R. (2011), *Wadliwy towar, duża szkoda, poważne konsekwencje*, „Rzeczpospolita” z dnia 15 grudnia.
- Stefanicki R. (2009), *Odpowiedzialność sprzedawcy z tytułu rękojmi za wady rzeczy a odpowiedzialność za zgodność towaru z umową. Część I*, „Ekonomika przedsiębiorstwa”, nr 11.
- Trocha P. (2007), *Kary pieniężne za wprowadzenie niebezpiecznych produktów*, „Gazeta Prawna” z dnia 30 marca.
- Sikora P. (2013), *Twój produkt też może być niebezpieczny*, „Rzeczpospolita” z dnia 21 marca.
- Ustawa z dnia 2 marca 2000 r. o ochronie niektórych praw konsumentów oraz o odpowiedzialności za wyrządzoną szkodę przez produkt niebezpieczny. Dz.U. 22/2000, poz. 271 z późn. zm.
- Zymonik K. (2002), *Odpowiedzialność za jakość produktu wyniki badań*, „Problemy jakości”, nr 4.
- Zymonik K. (2008), *Gwarancja konsumencka (komercyjna)*, „Problemy jakości”, nr 2.
- Zymonik Z., Wasińska A. (2008), *Zapewnienie bezpieczeństwa wyrobu w procesie projektowania*, „Problemy jakości”, nr 10.

---

**LIABILITY INSURANCE FOR DAMAGE CAUSED  
BY DANGEROUS NON-FOOD PRODUCTS  
OF EVERYDAY USE IN HOUSEHOLDS IN POLAND**

**Summary:** A characteristic feature of the current civilization is the mass production of all sorts of products. Despite the greater technological progress, organisational and legal security, we see that the defective, dangerous products, are still marketed. Manufacturers are responsible for the poor quality of products, this is a civil liability for the product. Consumer demands continue to grow and meet more and more consumer claims for defective products targeted for sale. The purpose of this article is to assess the status, opportunities and needs for civil liability insurance for the product. We limit the analysis only to civil liability for non-food items of everyday use in households. We'll show you the scale of the problems, as well as opportunities for insurance for business entity and their civil liability.

**Keywords:** dangerous non-food products of everyday use, liability insurance.